専修人文論集 100号
（2017）083-101

数学における知識の拡張可能性について

金　子　洋　之*

はじめに―問題設定と背景

フレーゲは，『算術の基礎』第88節において，次のように語っている。

> そこでは，箱の中に入れておいたものを再び箱から取り出すというだけではない。これらの帰結は我々の知識を拡張し，それゆえカントに従えば総合的とみなされるべきであろう。それにもかかわらず，それらは純粋に論理的な証明が可能であり，よって分析的なのである。たしかにそうした帰結は定義の中に含まれてはいるが，しかし種子の中の植物のようにであって，家屋の中の梁のようにではない。（邦訳，pp. 151–152.）

この引用から判断するかぎり，数学という学問が知識を追求する分野であり，まさしく新たな知識の獲得という意味で数学的知識の拡張が可能だとフレーゲが考えていたことは明らかである。フレーゲがいかにしてそのように考えることができたのか，その知識拡張のメカニズムはいかなるメカニズムであるのか，それがここでの課題である[1]。

この課題が解明すべき課題として浮上してくるのは，その一方でフレーゲは，引用からも明らかなように，数学が分析的だと考えているからであ

＊専修大学文学部教授

る。このことはカントの場合にもやはり課題になる。というのも，よく知られているように，カントは，数学的知識を分析的ではないものの，アプリオリだと考えていたからである。

では，数学がアプリオリであったり，分析的であったりすると，なぜ数学における知識の拡張という事態が解明すべき事柄となるのか。ここではまず，以下の議論で用いられる様々な概念の整理という意味も込めて，数学がアプリオリであるとすれば，どのような困難が引き起こされるのかということから考えてみたい。

「アプリオリ」という概念には歴史的な意味の変遷があるけれども，少なくともカント以降の用法では次のようなことが意味されているように思われる。すなわち，ある知識がアプリオリであるということは，その知識が「経験から絶対的に独立して」生じているということである。あるいはもっと特定的に言えば，その知識や認識の源泉が感覚経験にあるわけではないということである。ただし，このように言うことは，二つのことを意味しているように思われる。第一に，ある認識，あるいはその認識を表現する命題がアプリオリであるということは，その認識や命題が真であることの根拠を経験的なもの（感覚知覚）に求めることはできないということである。しかしある認識がアプリオリであるということによって意味されているのは，これだけではない。いささかダメット的バイアスがかかった言い方でそれを述べると，アプリオリな命題が言及している対象を経験的な外部環境に求めることはできないということ，例えば数学における様々な対象の存在を外部環境においてすでに与えられているものと考えることはできない，ということを意味するであろう[2]。そして，アプリオリな認識についてのこうした特徴づけから，もしアプリオリな知識があるとすれば，それらの知識は普遍的な妥当性をもつであろうし，そうした知識に対する反例が生ずることは一切ないであろう。

しかしながら，その一方で，知識というものがかりに「正当化された真

なる信念」であるとすると，アプリオリな知識という概念はこのような定義と一定の緊張関係に立たざるをえないように思われる。というのも，知識というのは認識主体の外部についての情報，つまり経験に基づくものでなければならないとも考えられるからである。たしかに，「正当化された真なる信念」という定義そのもののうちに，経験の要請という含意はない。しかし，「正当化」と「真理性」の要求をまともに受け止めるべきだとすれば，そして得られる知識がわれわれの認識の拡大をもたらすという意味で，「拡充的 ampliative」であるべきだとすれば，そうした知識の源泉は究極的には外部の感覚経験に求めるしかないのではないか。もし知識というものがそのようなものであるならば，アプリオリな知識という概念自体が存立し得ないであろう。

アプリオリと知識の関係をめぐってそのような議論がある一方で，それにもかかわらずカントやフレーゲがアプリオリな知識を希求することの背景には，アプリオリなもの—ここでは数学や論理学—こそが経験を統制するのであり，その逆ではないという考え方が潜んでいるように思われる。したがって，数学的な知識というものがあるとすれば，それは経験的な事象についての知識ではないはずである。とすると，数学において知識が拡張されるというとき，われわれが新たに獲得する知識はいったいどのような知識なのであろうか。

さて，この課題をまさにいま述べたような形で定式化し，それに対して一定の説得力をもつ解答を与えたのは，もちろんカントであった。カントは，数学が知識の拡張をもたらすことができる，つまり拡充的であると考え，したがって，数学はアプリオリであるが，（論理学とは違って）同時に分析的であるということはないと考えた。すなわち，数学が拡充的であるのは，それが論理学のような単なる概念分析に終始するわけではなく，まさに直観を必要とするからなのである。その意味で，数学は総合的である。ただし，その直観は純粋であるがゆえに，数学のアプリオリ性は維持

される。かくしてアプリオリな総合的判断というわけである。もちろん，この解答をわれわれはそのままで受け入れることができるかといえば，それはそうではないであろう。なぜなら，直観という概念を含めたカントの超越論的観念論にわれわれはそのままで賛成できるわけではないし，またフレーゲが批判するように，カントは数学の命題形式をあまりに限定的に捉えていたからでもある。とはいえ，これは，アプリオリな知識がいかにして可能であるかという問いへの一つの解答ではある。

しかしながら，アプリオリな知識の可能性それ自体が大きな困難をはらむにもかかわらず，先の引用からわかるように，フレーゲは数学的（算術的）判断の総合性を否定する。すなわち，算術的命題あるいは算術的判断は分析的だというのである。これは，フレーゲの論理主義というプロジェクトの観点からすれば自然な方向ではあるが，それは同時にカント以上の困難を抱え込むことになる。それはどうしてか。

いまわれわれが考えているのは「アプリオリ」であり，かつ「分析的」という組み合わせである。もし「分析的」ということが，与えられた概念から，そこにすでに含まれる下位概念の抽出を意味するとすれば，「アプリオリでかつ分析的」という組み合わせの下では，知識の拡張ということがほとんどあり得ないということが見て取れる。なぜなら，アプリオリということで，経験的なものを引き合いに出すことができず，「分析的」ということで，すでに与えられているものからの抽出しかできないとすれば，知識の拡張ということはありえない事態になってしまうからである。したがって，もし数学がアプリオリでかつ分析的であるとすれば，数学において知識の拡張ということはほとんどありえないようにすら思われる。

暫定的解答とその問題点

この困難，すなわち，アプリオリで分析的な判断と知識の拡張とが両立

しそうにないという困難，に対するフレーゲの答えは，表面的には次のようなものだと考えられるかもしれない。

> 演繹の結論は諸前提に含まれているにもかかわらず，前提からそれを引き出すには労力が要求されるのであり，したがって演繹の規則は拡充的である[4]。

ところで，この引用に述べられているのは，論理的演繹のステップが拡充的だということである。問題は，数学的な推論が拡充的かどうかであったのであり，論理的演繹そのものが拡充的かどうかではなかったのではないか。しかしながら，フレーゲの論理主義，すなわち，算術の概念をすべて論理的な概念のみによって定義し，論理的な原理から算術的命題を導出するというプロジェクトが与えられているとすると，算術の定理がわれわれの認識を拡張するか否かという問いは，論理的演繹がわれわれの認識を拡張するか否かという問いと同等になると，とりあえずは考えられる[5]。

それを踏まえた上で，上の引用に示されている考え方が，フレーゲの課題，算術における演繹的な前進がわれわれの認識的な前進をもたらすか否かという問いの解答として適切かどうかを検討してみよう。たしかに，フレーゲはこれに類したことを語っていないわけではない。例えば，『算術の基礎』第17節では，「そうした法則からは，その一つ一つの中には含まれていない，新しい命題が導出されなければならない。たしかに，この新しい命題は，そうした法則をすべて一緒にすれば，すでにその中に何らかの仕方で含まれている。しかし，だからといって，そこから新しい命題を展開し，それ自体として明示するという仕事が免除されはしないのである。」（邦訳，p. 68.）ということが語られている。もしこの文章と，本稿の冒頭に引用した第88節の「これらの帰結は我々の知識を拡張し」という部分とを結び付けて解釈するならば，フレーゲは，諸前提に含まれる結論を演繹的に導出するのには，労力が必要とされるのだから，その意味で，

演繹規則は拡充的だと主張しているということになるだろう。そして，もしフレーゲがそのような主張をしているとすれば，ただちに次のような批判が返ってくることも明らかである。

> しかしながら，この反論は正当化されない。というのも，与えられた諸前提からあらゆる演繹を枚挙するためのアルゴリズムが存在するからである。したがって，諸前提から結論を演繹することは，原理的には純粋に機械的な作業である。前提からわれわれが引き出す結論はわれわれの知識を拡張するというフレーゲの主張は，ある型の心理主義である。なぜなら，それは心理的な目新しさを論理的な目新しさと取り違えているからである[6]。

さて，私はこの Cellucci［2013］の批判は，その前提（すなわち，彼がフレーゲに見てとった答え）も含めて誤っていると考えている。あれほどまでに心理主義に抵抗してきたフレーゲが，いわば自分のプロジェクトの核心にあたる部分において，心理的な新奇性を論理的な新奇性と取り違えるということはありそうにないからである[7]。とはいえ，もちろん，フレーゲの意図に反して，結果が心理主義的なものになってしまっている，ということはありえないわけではない。したがって，Cellucci［2013］の批判を全面的に却下するには，算術的命題の導出が拡充的であるということをフレーゲがどのように捉えていたのかについて納得できる代案を提出する必要がある。以下では，この点について，これまで提案されてきたいくつかの見解を参照しながら，検討してみたい。

この節の最後として，これほどフレーゲ解釈として誤っているように思われる Cellucci［2013］の批判をここで取り上げた理由について若干触れておきたい。チェルーチは，明らかに現代の標準的な言語観，すなわち表示的意味論（ないし指示的意味論）に基づくモデル論的な言語観を採用している。モデル論的な言語観というのは，一方に形式的な記号の体系があ

り，もう一方にそれらの記号言語に対する解釈があるとするような言語観である。したがって，この言語観に基づくならば，演繹的導出を表現するための形式言語とその妥当性を保証するための意味論的解釈という二つの次元しか存在しないことになるであろう。そのため，もし形式言語で表現されるわけでもなければ，解釈の次元で取り扱われるのでもないもの，例えば，認識的な拡充性のようなものがあるとすれば，それは，これらの次元の外，すなわち，論理学とは無関係な心理学的次元に追いやられるしかないのである。以下で取り上げる Macbeth［2007］でも示唆されているように，フレーゲは，こうしたモデル論的な言語観とはかなり違った言語についての考え方をもっていたように思われる。Cellucci［2013］の批判は，それを明らかにするための参照点としての意義をもつのである。

カントの記号言語

前節の最後で，フレーゲは，現代のモデル論的な言語観とは異なる言語観をもっていたのではないかということを示唆したが，Macbeth［2007］は，その手掛かりをカントに求めている。モデル論的言語観では，言語というものが，すでに述べたように，意味をもたない記号レベルと，その記号に解釈を与えるレベルの二層的な構造で捉えられている。これに対して，カントにおいては，数学者の用いる記号言語が記号レベルと解釈レベルの間に中間の層をもつような三層の構造として捉えられていることをマクベスは指摘し，これを「三つのレベルの分節化」と呼んでいる。そして，フレーゲは，もちろん必要な改訂を加えた上ではあるけれども，基本的にこのカントの三層的言語観を受け継いでいること，さらに，そうした中間層が存在することが，カントとフレーゲ両者にアプリオリでありながら知識の拡張をもたらすようなメカニズムを可能にしているのだと主張している。

では，そうした三層的な言語観とは具体的にはどのようなものであり，

その言語観が知識の拡張をもたらすのはいかなるメカニズムによってなのか。また，フレーゲが加えた改訂とはどのようなものなのか。以下，これらの問題を順番に見ていこう。

Macbeth［2007］では，カントにおける三層的な言語観が次のようにまとめられている[8]。

そのとき，数学において使われる記号の諸体系は，三つの異なったレベルの分節化をもつ。第一に，原初的な記号が存在し，それらからすべてのものが合成される。続いて，これらの原初的な記号から形成されて，一つの全体をなす統一体が様々に存在する。これらは，数学の関連する領域の主題を構成するような統一体であり，例えば，算術における数やユークリッド幾何学における図形などである。そして最後に，原初的なパーツから作られた（中間的）統一体からなる最大の全体（例えば，ユークリッドの作図ダイアグラムやアラビア数字による計算）が存在する[9]。

例で考えてみよう。例えば，アラビア数字の体系においては，各々の数字がここで言う原初的な記号である。それらが組み合わされてより大きな数という統一体が形成される。例えば‘41’とか，‘273’とかがそのような中間的な統一体である。そしてそれらを用いて，‘41×273’のような計算が組み立てられる。ここで大事なのは，原初的な記号がそれ自体で完全に確定した意味を持つわけではないということである。例えば，‘41’と‘14’とでは，‘４’の果たす役割が違っている。要するに，原初記号が何を指示しているかは，それが用いられる文脈によって決まるのであり，そのような文脈依存的な指示の確定を可能にしているのが，ここで言う中間段階の存在なのである。

もう一つの，幾何学からの例を見ておきたい。ユークリッド幾何学の体系においては，原初的な記号に相当するのは，点，直線，角，領域などであり，これらから他のあらゆるものが構成される。例えば，正方形は，四

つの直線と，それらが交わる四つの点，それらの直線が作る四つの角から構成されている。こうして様々な図形が与えられるが，それですべてというわけではない。例えば，正三角形の作図というケースを考えてみよう。まず，一本の線分が与えられ，その線分の一方の端点を中心点とし，その線分を半径とする円を描く。同様にもう一方の端点を中心として，その線分を半径とする円を描く。それらの円の交点のひとつを線分の端点と結ぶことによって，三角形が描ける。このとき，最初に与えられた線分は，円の半径として把握されている。しかしその同じ線分が，完成した三角形では，その一辺として把握されている。いわば，原初的な記号としての線分の意味が，作図のプロセスの場面ごとに違ったものとして把握されているのである。もちろん，こうした例は（フレーゲにかんしては）比喩の域を出るものではないが，原初的な記号の指示が，文脈によって変化するという三層的言語観のイメージを把握するにはよい例であろうと思われる。

もしこのような三層的な言語観をカントが保持していたとすれば，数学には，（彼の考える）論理学や哲学における概念の分析に基づくような推論だけでなく，あらかじめ与えられた概念から出発し，それらを組み替えることによってそれまでにはなかった新たな概念の構成を可能にするようなメカニズムが備わっていることになる。そしてこのメカニズムが，認識の拡張を可能にするのである。

しかし問題は，同じ線分が文脈によって異なった形で把握されるという事態が，単にアスペクトの変化によるものであり，その意味でそれはあくまでも主観的な，あるいは心理的な変化にすぎないように思われることである。もしそうだとすれば，フレーゲの言う「仕事」やチェルーチの言う「労力」は，心理的な作業のことになってしまい，最初の節で述べたような批判が当てはまってしまうことになるであろう。そして，カント自身もこの側面を主観的なものと捉えていたように思われる。

フレーゲの改変—意味と意義

Macbeth［2007］では，フレーゲもまた，カントと同様な三層的言語観を抱いていたことが主張されている。ただし，フレーゲのそれは，カントとまったく同じというわけではない。Macbeth［2007］によれば，フレーゲの言語観の最大の特徴は，概念がそれ自体で完全に客観的な存在者であるという点にある[10]。このカントとの相違点は何を意味するのかを考えてみよう。

カントにおいては，概念はいわば独立した存在者ではない。対象による充足を待って初めてそれは真理に到達することができる。それゆえ，かりに数学的な概念構成によって新たな概念に至ったとしても，それだけでは空虚であり，直観による対象の補足が必要になるであろう。言い換えると，概念の操作や構成が，カントにおいてはそれ自体で客観的なものだという保証はない。対象というアンカーを通して初めてその認識は客観性を獲得するのである。したがって，概念操作の客観性を保証するために，ここには概念と直観という区別が設定されている。これに対して，

> 結果的にフレーゲは，カントの概念と直観という区別を，一方では**意味**と**意義**の区別，他方では概念と対象という区別のふたつの区別へと分離させる。客観性は対象との関係に必ずしも基礎づけられるわけではないし，認知的な意味としての意義は概念を巻き込んでいることに負っているわけではない[11]。

実際，フレーゲがこのような二重の区別を考えていたことは，次の一節からも明らかである。

> ある論文（「意義と意味について」）において私は，差し当たり固有名（ないしは

そう言いたければ単称名（Einzelname）の場合だけ意義と意味を区別した。同じ区別を，概念語の場合にも行うことができる。ところで，概念と対象の区別を意義と意味の区別と混同し，その結果一方では意義と概念を，他方では意味と対象とを融合させることにより，容易に不明確さが生じうるのである。通常はどの概念語ないし固有名にも，これらの語の私の使用法では，一つの意義と一つの意味とが対応する[12]。

では，こうした二重の区別を導入したことによって，フレーゲは何を得たのであろうか。この二重の区別，特に概念語にかんして，それが対象とは独立にそれ自体で意義と意味をもつとする転換が，フレーゲをして算術命題の総合性を否定するように導いたことは明らかであろう。しかし，この二重の区別がもたらすものはそれだけではない。それを見るために，フレーゲが『算術の基礎』において‘１＋１＋１＝３’という数式をめぐって行った批判を考えてみよう。

フレーゲは，『算術の基礎』第37節から第39節にかけて，数を単位と考えることから生ずる困難を扱っている。いま‘１＋１＋１＝３’という数式を考えてみよう。これは明らかに算術的な真理のひとつを表現している。そして，通常の見方では，この数式は「数１と数１と数１を合わせれば，数３と等しい」ということを意味するものと解釈されるかもしれない。しかし，「相異なった数一が存在するのではなく，一はただ一つ存在する」のだから，「１と１と１は３ではなく，金と金と金が決して金以外のものではないように，１である。」[13]

とすると，われわれはこの数式をどのように理解すればよいのであろうか Macbeth［2007］においては次のような説明が与えられている。

フレーゲは以下のように示唆している。アラビア数字の体系の原初的記号を，どんな使用からも独立したものと受け取る――例えば，数詞‘１’を文脈がどうあれ，

数一を指示するものと受け取る――代わりに，われわれはそれらの記号を，それらの使用に先行しては意義しか表現しないと理解すべきである。

だから，これらの記号から合成される文は，その時点では思想を表現するだけなのである。そして次に，その思想が，関数と項へと分解される。もちろんその分解の仕方はひとつではない。例えば，‘１＋１＋１＝３’は関数‘ξ＋１＋１＝３’と項‘１’へと分解することもできるし，‘１＋１＋１’と‘３’を項（同じ数三を指示する対象名）とみなし，‘ξ＝ζ’を関数ととることもできる。したがって，文‘１＋１＋１＝３’は，それ自体で真理値を指示するのではなく，まずもって思想を表現するものなのである。そして，その思想をどのように関数と項へと分析するかに相対的に，その文に含まれる概念と対象が決定され，それに基づいて文そのものの指示が決まる。

ここからは私自身の推測だが，この‘１＋１＋１’そのものも，例えば‘ξ＋１’のように関数として解釈され，さらにはこの‘ξ’そのものが‘ζ＋１’のように関数的に解されることを通して，対象名として把握されるのである。とすれば，‘１＋１＋１’は「１と１と１」として把握されるわけではない。このような把握の下では，単位がそれぞれ互いに異なると同時に，同一のものとして把握されるという困難は回避されるのである。

マクベスによるこの説明は，フレーゲの『算術の基礎』を「意義と意味について」以降のフレーゲの後期の見解をもって解釈するという離れ業を含んでいるにもかかわらず，一定の説得力をもつように思われる。それは，この説明の前提となっている三層的な言語観が，フレーゲに見出されてきた様々な謎を解決する手掛かりを与えてくれるからであり，また，意義と意味の区別をフレーゲの論理思想の内部に的確に位置づけることを可能にしてくれるからでもある。しかし，問題は，このような解釈を経た上で，

なお算術における知識の拡張メカニズムが十分に説明されているか否かである。

数学は拡充的か

フレーゲについてこれまで見てきたような説明は，数学がアプリオリでかつ分析的であるにもかかわらず，なお拡充的であることを十分に説明できているのであろうか。これを検討するにあたって，まず，二つのコメントを付け加えたい。ひとつは，演繹の有用性についてダメットが語ってきたことについてであり，もうひとつは，この認識的な拡充性をもう少し抽象的なレベルで捉えるとどうなるかについてのコメントである。

ダメットは，与えられた述語（概念語）から項を取り去り，それを変数に置き換えることによって新たな概念を形成するというフレーゲの手法を非常に高く評価してきた。このフレーゲの手法は，マクベスが述べている三層的な言語観の中間層においてなされる作業に（部分的に）相当する。実際，フレーゲのこのような概念形成の方法は，演繹的推論が高度に認知的な手続き（「高度な重要性をもった知的操作についての言語的反省」）を含むという意味で，演繹的推論が単なる機械的な手続きではないことを明らかにしている。しかしながら，この点でフレーゲの考察が優れていることを評価しながらも，ダメットは，演繹の有用性を説明するにはそれだけでは十分ではないと主張している。このあたりのダメットの議論は別稿で論じたので省略するが[14]，要するにダメットは，演繹の有用性を説明するには，演繹的導出のうちに単なる概念形成の手法が含まれているだけではなく，そこに高階のパターンを把握することがふくまれていなくてはならない，と示唆しているのである。しかし，もしマクベスが提示するフレーゲの描像が正しいとすれば，この「高階のパターンの把握」で言われていることの少なくとも一部は，すでにフレーゲの「概念記法」の提示のうち

に含まれているのではないか。

　例えば，『概念記法』においてフレーゲは，「ある対象が性質Gをもつが，性質Fをもたないならば，あるGでFでないものが存在する」の証明を提示している。これを現代的に表記すれば，

$$(G(a)\wedge\neg F(a))\rightarrow\exists x(G(x)\wedge\neg F(x))$$

となる。この定理のフレーゲによる証明のごく最初の方だけを見てみよう[15]。ここでは公理(1)と(2)，すなわち，

(1)　$a\rightarrow(b\rightarrow a)$

(2)　$(c\rightarrow(b\rightarrow a))\rightarrow((c\rightarrow b)\rightarrow(c\rightarrow a))$

から出発し，まず，

(3)　$(b\rightarrow c)\rightarrow((c\rightarrow(b\rightarrow a))\rightarrow((c\rightarrow b)\rightarrow(c\rightarrow a)))$

を導くというプロセスがたどられている。そこでなされている代入は，(1)のaに(2)そのものを代入し，同じ(1)のbに‘b→a’を代入し，それによって得られた式と(2)とから，MPによって(3)を導くという操作である[16]。

　これは，フレーゲの公理系やラッセルの公理系での証明を経験したことのある者ならばだれでもわかるように，何に何を代入するかのやっかいな例である。また，これらの公理や定理は，その使われる場面において，違った形で読まれうることにも注意したい。例えば，公理(1)は，「あることが成立するならば，それは，どんな条件の下でも成立する」と読まれうるし，あるいは「aとbからは，aが帰結する」とも読むことができるのである。もちろん，証明のときどきにおけるこの代入パターンの把握や公理の読み方の変化をもって，ダメットが高階のパターン把握でもって言わんとしていることのすべてを尽くしているとまでは言えないとしても，少なくともフレーゲの中間層には，単なる概念の抽出以上の認知的作業が含まれてい

るとは言えるように思われる。そして，フレーゲの体系に代えて，例えば，自然演繹の体系を使えば，こうした認知的作業が大幅に軽減されるという事実それ自体が，証明における，あるいは証明の理解におけるある種の拡充を示していると言えるであろう。そしてこの体系の相違によって何が生み出されてきたかを考慮するならば，それらの相違を単に心理的なものと捉えることがいかに誤っているかも明らかになるはずである。

このように見てくるならば，これまで中間層と呼んできたレベルにおけるフレーゲの概念操作の手法は，認識の拡充をもたらすメカニズムを十分に示しているのではないだろうか。それが一見すると，認識の拡張をもたらすように思われないのは，われわれが，認識というものを，経験的な外部世界の対象にかんする事実認識を典型として考えているからなのである。だが，数学において言及される対象や概念は，少なくともフレーゲにとっては，そうした外部環境によって与えられるものではない。われわれは，与えられた文から概念を抽出する以外に，論理的な概念を入手する手段をもたないのである。そしてそのような論理的概念を介してしか論理的対象を生み出すことはできない。とすれば，ヒュームの原理を基礎にして同値類を構成するというフレーゲの手法が，たとえ，すでに与えられているものを組み替えるだけであるとしても，認識的には新たなものを生み出しており，それを支えるのが，意義（思想）として与えられたものを様々な仕方で関数と項に分解するというメカニズムなのではないだろうか。

次に，セッティングをもう少し大きくして，認識的拡充の問題を別な角度から見てみたい。以下の議論はまったく決定的なものではないが，それでもそれを取り上げるのは，もしかすると，演繹的推論が認識的な拡張をもたらすか否かという問い自体が誤った問いである可能性をそれが示唆しているからである。

演繹的推論が認識的な拡張をもたらすか否かという問題がひとつの困難になるのは，演繹的推論の妥当性が，結論が前提に何も付け加えない，前

提にすでに含まれているものを結論は引き出すだけだということによって保障されているからである。このことを，もし諸前提から結論が論理的に帰結するならば，「それらの前提がすべて真なときに，結論が偽であることは不可能である」とアリストテレス風に言い換えてみよう。かりに論理的必然性（およびその対としての論理的不可能性）というものが存在し，いまの言い換えによってそれが表現されているとすれば，演繹的推論による認識の拡充を認めない人たちは何を主張していることになるだろうか。それは，「前提がすべて真でありながら，結論が偽であるという論理的可能性は存在しない」から「前提がすべて真でありながら，結論が偽であるといういかなる認識的可能性も存在しない」へ移行できるということである。しかし，ここにはひとつの前提が隠されていて，それは「あらゆる認識的な可能性は，論理的可能性だ」ということにほかならないように思われる[17]。これが意味していることを見るために，まず

> ある人物Aにとって P ということが認識的に可能であるのは，P でないことを A が知らないときである。

と約定しよう。すると，「あらゆる認識的な可能性は，論理的可能性だ」というのは，A が P でないということを知らないときにはいつでも，P は論理的に可能だということになる。この対偶をとれば，「P でないということが論理的に必然的なときはいつでも，A は P でないことを知っている」ということになる。ここでの否定に何ら特別なものはないから，これをストレートに言えば，Q ということが論理的に必然的ならば，A は Q を知っている，ということになる。演繹的推論における認識の拡充性に反対する人々は，この帰結を用いて「前提に含まれているものは，すでに推論者によって知られている，ゆえに，認識の拡張はありえない」と論じているのである。したがって，「あらゆる認識的な可能性は，論理的可能性だ」と

いう前提を拒否できるならば，演繹的推論は認識的拡充をもたらすことはできないという主張を退けることができるかもしれない[18]。

もちろんこの議論には，アリストテレス風言い換えの妥当性を含めて，様々な前提がある。本稿では，この線に沿った議論は行わない[19]。しかし，フレーゲの手法を評価するひとつの視点をこの議論は与えてくれるように思われる。

私がここで示唆したいのは，「あらゆる認識的な可能性は，論理的可能性だ」という前提がすでにモデル論的な言語観のうちに暗黙に組み込まれてしまっているのではないか，ということである。非常に大雑把に言えば，形式言語を解釈すること，あるいは形式言語にモデルを与えることは，対象や属性のカテゴリーの区分を含む言語への翻訳を与えることである。もし翻訳がうまくいっているとすれば，そこに認識的次元が入り込む余地はない。あるいは，モデル言語において指示や真理の概念を用いることによって，あたかも認識的次元が組み込まれていることを装うことによって，そのような次元の存在を見えなくしてしまっているのかもしれない。とすれば，このような言語観の下では，「あらゆる認識的な可能性は，論理的可能性だ」ということが成立してしまうのは当然である。だが，フレーゲやカントは，そのような認識的な次元が存在することを疑っていなかったのであり，それを明らかにしたという点で，マクベスの言う三層的言語観には大きな意義があるように思われる。

註

1．ただし，これは本稿のいわば表向きの課題である。背景にある課題は，この表向きの課題の追及を通して，次の点を明らかにすることである。すなわち，「演繹的推論は，その妥当性をいわばその分析性に負っているのだから，そこに認識の前進などありはしない」といういかにももっともらしい主張は，実際には一種の誤解に基づいているのではないか。したがって，この主張を認めた上で，なお認識の拡張可能性を探ろうという哲学的課題自体が，誤った見通しの上に成立しているのではないか，ということである。本稿ではこの点を本格的に追及していないが，若干の示唆が論文の最

後で述べられている。

2．ただし数学の応用における橋渡し命題のようなものは除外する。この点が，カントには当てはまらないことは以下に見るとおりである。

3．では，数学がアポステリオリであるということはあり得るのだろうか。そのように考える哲学者は確かにおり，その代表者はJ.S.ミルであるが，いまの議論ではこの立場は無視することにする。

4．Cellucci［2013］，p.284.

5．ただし，このことはカントのケースには当てはまらない。

6．Cellucci［2013］，p.284.

7．チェルーチは，フレーゲが取り違えているという論理的新奇性を自分自身どう説明するのであろうか。

8．ただし，このMacbeth［2007］でのカントの捉え方が，カント解釈として適切かどうかという問題にはここでは関与しない。マクベスは，そのような三層的な言語観をカントに読み取るための手掛かりとして，『自然神学と道徳の原則の判明性』の第一考察での議論を引用している。

9．Macbeth［2007］，p.67.

10．Macbeth［2007］p.75.

11．ibid. p.75.

12．Frege，［1892-95］，p.128．邦訳，p.103.

13．Frege［1884］，p.49．およびp.50．邦訳，p.96．およびp.97.

14．拙稿「論理の有用性から証明の認識論へ」，『哲学の探求』第39号，2011.所収。

15．Frege［1879］，pp.26-29．邦訳，pp.43-47.

16．Macbeth［2007］の後半では，この定理の分析だけでなく，系列の理論の定理までを含めてより詳細な分析が提示されている。

17．Rumfit［2015］，pp.57-58.

18．Rumfit［2015］では，ミルのような，演繹的推論が認識的な拡張をもたらすことを否定する論者に対して，この前提を帰することによって，そうした否定論者たちが論点先取を犯しているという形で議論が展開されている。

19．例えば，Dorothy Edgingtonのように，論理的必然性は認識的必然性にほかならないという論者もいる。

参照文献

Kant I.［1764］Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality, in *Theoretical Philosophy,* 1755-1770, trans. and ed. D. Walford with R. Meerbote. New York: Cambridge Univ. Press, 1992,「自然神学と道徳の原則の判明性」（植村恒一郎訳）『カント全集３　前批判期論集　III』所収，岩波書店，2001.

Frege G.［1879］*Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachbegildete Formelsprache des* *reinen Denkens,* Halle: Louis Nebert,『フレーゲ著作集 1　概念記法』（藤村龍雄訳），勁草書房，1999.

Frege G.［1880/81］Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift, in *Nachgelassene Schriften,* ed. H. Hermes et al. Hamburg: Felix Meiner 1969,「ブールの論理計算と概念記法」（戸田山和久訳）『フレーゲ著作集 1　概念記法』，勁草書房，1999.

Frege G.［1884］*Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl,* Wilhelm Koeber, Breslau,『フレーゲ著作集 2　算術の基礎』（三平正明・土屋俊・野本和幸訳），勁草書房，2001.

Frege［1892-95］Ausfurungen uber Sinn und Bedeutung, in *Nachgelassene Schriften,* ed. H. Hermes et al. Hamburg: Felix Meiner 1969,「意義と意味詳論」（野本和幸訳）『フレーゲ著作集 4　哲学論集』，pp. 103–114．勁草書房，1999.

Macbeth, D.［2007］Striving for Truth in the Practice of Mathematics: Kant and Frege, in *Essays on Frege's Conception of Truth,* ed. D. Greimann, Amsterdam: Rodopi 2007.

Rumfit, I［2015］*The Boundary Stones of Tought,* Oxford: Oxford Univ. Press, 2015.