Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 53, No. 1, 9-39, 2018

空間経済と輸送費用*

中島　　巖**

〈要約〉

Beckmann を先駆とする 2 次元空間における連続なフロー（flow）に関するモデルが議論される。そこでのフローは，立地位置座標の連続函数となる方向と規模(密度)をもつ連続ベクトル場を構成する。かかるモデルは，道路網の抽象化とみなせる。空間は，局地的に決定された費用を支払いさえすれば，どこへでも，凡ゆる方向に移動が可能な場と捉えられる。

以下では，まず，新古典派経済学の枠組の中で，財の移転にともなう輸送費用の負担者を反映する工場引渡し価格と統一引渡し価格の 2 つの価格づけの下で，地域内の立地企業数の競争市場による決定数(均衡)が Pareto 最適性(効率性)が要請する水準以下に留まる過少均衡であることが帰結される。

次いで，Beckmann 流のベクトル場におけるフローとしての財の取引量(密度)と方向の競争市場決定(均衡)を発散法則と勾配法則のタームで特定する。

発散法則，勾配法則は，フローとしての流体，熱等が展開するベクトル場において確認される帰結であるが，経済活動としての財取引を取引量(密度)，方向をもつベクトル・フローと捉えることによって，上の 2 つの法則の援用が可能となる。

最後に，生産をともなわず，制度的要件が所与とされるところでの短期的均衡が上の二つの法則のタームで特定され，次いで，生産をともない，制度的要件も選択対象たり得るところでの長期的均衡が特定される。いずれの均衡も，限定的条件の下で，効率性基準を満たすことが結論される。

JEL 区分：R11, R12
キーワード：工場引渡し価格，統一引渡し価格，発散法則，勾配法則

＊　筆者は，文献［13］の閲覧に関して専修大学図学館のご好誼に負う。記して感謝いたしたい。
＊＊　専修大学名誉教授

序

宗教的，歴史的理由によって，森林を失いかけたドイツにおける森林の復活と有効利用を目的とする議論が，森林を通した資本理論の形成をドイツに促がし，さらに，スウェーデンにまでその展開の波が及び，ストックホルム学派の形成を加速化させる結果をもたらしたごとくである。

その一方で，限定された土地において，とりわけ経済活動が，その活動場所の選択，占有の条件を議論する立地論がドイツ語圏において地域科学の重要な分野の一つとなっていった。

一般には，農業立地の観点から「孤立圏」を唱えたvon Thünen対し，工場立地の観点から「工業立地論」を唱えたWeberといった産業区分に基づく対比が一般に知られているごとくであるが，Beckmannは，空間的に拡張され，したがって明示的に土地を利用する，すなわち，空間消費的（space consuming）な活動を想定したvon Thünenに対し，Weberは，空間のある地点に局地化され，しかしながら，それ自体限定をもたない活動を想定したとする。（両者の対比について，Beckmann＝Puu［13］参照。）

Beckmannは，von Thünenが念頭した平面は，Enclid幾何学的それであり，空間は，Newton力学的なそれであるとし，連続的2次元ベクトル場を空間として捉え，活動をそこでのフロー（flow）として位置づける接近法に対する端緒を開いた。（例えば，Beckmann［2］,［3］,［4］,［5］,［6］,［7］,［9］,［10］, Beckmann＝McGuire＝Winsten［12］等参照。同様な接近法によるその後の議論として，Puu［17］,［18］,［19］,［20］,［21］,［22］, Andersson＝Zhang［1］, Zhang［24］,［25］,［26］, Dendrinos＝Mullally［14］等参照。）

本稿の我々の目的は，Beckmannの接近法に拠りながら，区域における財の移動にともなう輸送費用を明示化した空間経済の競争市場均衡のあり方とその効率性を検討することにある。

まず，次節では，伝統的新古典派的枠組の中で工場引渡し価格と統一引渡し価格の2つの価格づけの下での競争的市場均衡の効率性をみる。第2節では，ベクトル場に関する若干の数学的準備の下，発散法則と勾配法則の意義をみる。第3節では，競争的市場における短期的均衡と長期的均衡のあり方とその効率性をみる。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第1節　空間市場と輸送費用

1．工場引渡し価格

本節では，取引規模と方向，価格が空間的に拡張されている空間経済において，財の移動が輸送費用をともなう空間市場がもたらす競争均衡の効率性を検討する。

本項では，財の価格づけが生産者の工場引渡し価格（mill price）に拠ってなされる市場の下での競争均衡のあり方をみる。

Beckmann［8］は，Lösch型の産業を含む空間市場経済を想定し，隣接する企業間の距離の均

衡条件を求める立地問題を検討した。[1] 以下では，Beckmann に拠りながら，１財の生産を含む空間市場の効率性をみる。

まず，生産者の生産活動と消費者の消費活動を規定しよう。

地域資源を用いて１種類の消費財を生産する各企業は同一費用函数をもち，新古典派的競争価格論に準じて，産出量に対して U 字型の平均費用をもつものとする。他方，消費者は一次元領域に一定の密度で分布するものとする。[2] このとき，消費財の消費量 x とその他の財・サービス（合成財）に対する支出 z に対して効用函数

$$u = u(x, z) \tag{1}$$

が定義される。ただし，その他の財・サービス（合成財）は価格１をもつものとする。

一般に，輸送費用をともなう財取引において，工場引渡し価格（mill price）と生産者が輸送費用分を含めて一括的に設定する統一引渡し価格（uniform price）の２通りの価格づけの仕方がある。本項では，前者が想定される。

各企業によって，別個の価格が設定されるとき，消費者は最安価な供給源を選択し，財の購入を図るものとする。このとき，供給企業からの距離 r に応じた輸送費用 $k(r)$ を自ら負担しなければならない。

拡散的に立地する企業から成る産業において，最安価供給企業は，地区において独占力を発揮し得るが，各企業は，完全競争者として，限界費用に等しい価格づけを行なうものとする。[3] しかるに，産業への新規参入が許されるところでは，既存企業の立地位置の調整を得て，中・長期的には，市場区域は均一化される，すなわち，隣接企業間の均衡距離が均一化されるであろう。

さて，上の想定の下で，均衡企業間距離を導こう。

いま，供給源企業から r の距離に在る家計の消費量を $x(r)$ とする。ここで，地区ないし家計の密度は１に等しいものとする。このとき，総販売量は，隣接企業間距離 $2R$ の下で，

$$x = 2\int_0^R x(r)\,dr \tag{2}$$

で表わされ，当該企業の利潤は

$$\Pi = p\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right) - C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right) \tag{3}$$

で表わされる。ただし，$C(\cdot)$ は，生産費用函数である。競争市場の要請は，

$$p = C'\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right) \tag{4}$$

$$2p\int_0^R x(r)\,dr - C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right) = 0 \tag{5}$$

を導く。ここで，(4)，(5)式を満たす均衡距離 $\hat{R}$ は，

$$2\int_0^{\hat{R}} x(r)\,dr \cdot C'\left(2\int_0^{\hat{R}} x(r)\,dr\right) - C\left(2\int_0^{\hat{R}} x(r)\,dr\right) = 0 \tag{6}$$

を満たす。しかるに，(6)式は，準凸函数（quasi-convex function）を成す生産費用函数の下での平均費用

$$\frac{C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right)}{2\int_0^R x(r)\,dr}$$

が，$R=\hat{R}$ において，最小値を取るための必要･十分条件を与える。

以上から，完全競争が単位生産費用の最小化を促すべく作用することが帰結される。

しかしながら，上の議論は，輸送費用の要因を欠いている。ここに，かかる競争均衡の Pareto 最適との対照化が要請される。

まず，Pareto 最適が，効用と利潤の正の加重平均の最大化で与えられることを確認しておこう。最寄りの生産者から距離 r に在る家計の効用に対する加重を $\lambda(r)\,(>0)$ とし，企業利潤に対するそれを $\mu\,(>0)$ で表わす。ここで，地区規模が一定であるものとすれば，地区の集計的厚生は，地区当たりの厚生に比例する。地区の社会的厚生函数は，

$$W=\frac{1}{2R}\left\{2\int_0^R \lambda(r)\,u(x,y(r)-k(r)x-px)\,dr\right.$$
$$\left.+\mu\left[p\cdot 2\int_0^R x(r)\,dr-C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right)\right]\right\} \tag{7}$$

で定義される。

ここで，消費者は厚生水準を最大化する消費量 $x(r)$ を選択するものとすると，問題は，企業間の最適距離 $2R$ の決定となり，直ちに，(7)式を最大化する最適条件

$$\frac{\partial W}{\partial R}=R\lambda(R)\,v(R)+\mu Rpx(R)-\mu RC'-\int_0^R \lambda(r)\,v(r)\,dr$$
$$-\mu p\int_0^R x(r)\,dr+\frac{1}{2}C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right)=0 \tag{8}$$

がしたがう。ただし，$v(r)\equiv u(x(r),y(r)-px(r)-k(r)x(r))$ である。

ここで，価格を限界費用に一致させる競争的価格設定条件（(4)式）と距離設定条件（(5)式）を想起し，(8)式に代入すれば

$$\int_0^R [\lambda(R)\,v(R)-\lambda(r)\,v(r)]\,dr=\mu R\,[C'-p]+\frac{\mu}{2}\left[2\int_0^R px(r)\,dr-C\right] \tag{9}$$

を導く。しかるに，(9)式の左辺は，R が地区当たりの平均効用

$$\frac{1}{R}\int_0^R \lambda(r)\,v(r)\,dr \tag{10}$$

を最大化するごとく加重 $\lambda(r)$ が選択されたときに限りゼロの値をとる。

もし，所得 $y(r)$ と加重 $\lambda(r)$ が一定，すなわち

$$y(r)\equiv y,\quad \lambda(r)\equiv\lambda$$

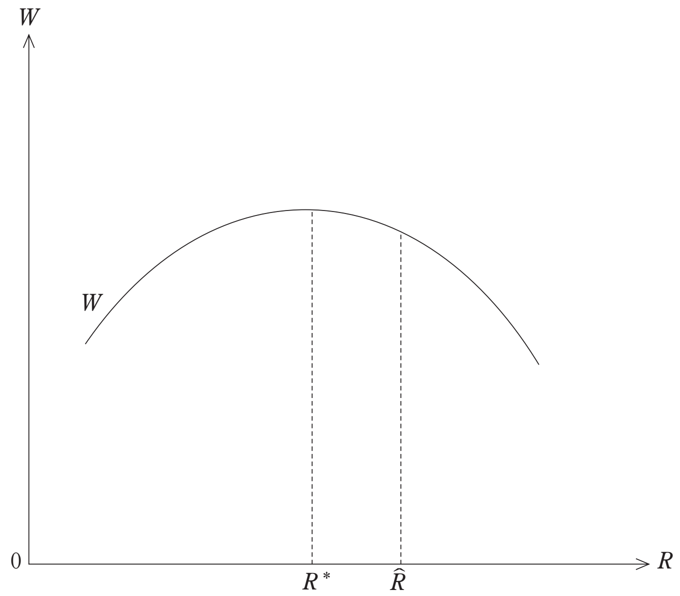

図-1

であるならば，$k(r)$は，増加函数であるから，平均効用（(9)式）は，常にRの減少函数となる。このことは，家計の加重が均一であり，所得と効用函数が一様であるとき，厚生函数（(7)式）は，競争均衡$\hat{R}$において減少函数となる。言い換えれば，Rを減少させることによってWを増加させることができる。したがって，上の加重函数の下で，社会的厚生を最大化する最適距離R^*に比して，企業間均衡距離$\hat{R}$は過大であるから，企業数を増加させて企業間距離の縮小化が望まれることが帰結される。（**図-1**参照）。）

2. 統一引渡し価格

本項では，統一引渡し価格の下での競争的市場均衡における企業間距離の効率性をみる。

いま，消費者の効用函数は，当該財の消費からしたがう効用部分$(\phi(x))$とその他財・サービス（合成財）の消費からしたがう部分$(y-px)$が線型を成すものとする。このとき，効用函数は家計を通じて共通であり，

$$u = y - px + \phi(x) \tag{11}$$

で表わされる。

このとき，社会的厚生は，

$$W = \frac{1}{2R}\left\{2\int_0^R \lambda(r)[y(r) - p(r)x(r) + \phi(x(r))]dr + \mu\cdot 2\int_0^R [p(r) - k(r)]x(r)dr - \mu C\left(2\int_0^R x(r)dr\right)\right\} \tag{12}$$

で表わされる。$0 \leq r \leq R$ を満たすすべての距離 r に対して，社会的厚生を最大化する統一引渡し価格が満たすべき条件は，

$$[-\lambda(r)+\mu]\,x(r)=0, \qquad \text{for all } 0 \leq r \leq R \tag{13}$$

で表わされる。(13)式は，$0 \leq r \leq R$ なるすべての距離に対して，正の消費がしたがう$(x(r)>0)$とき，

$$\lambda(r) \equiv \mu$$

を意味する。このとき，消費者から生産者への収入移転は上の厚生に対して中立的となるから，(12)式から収入移転分を消去し，$\mu \equiv 1$，$y(r) \equiv y$ と設定すれば，社会的厚生は，

$$W = y + \frac{1}{2R}\left\{2\int_0^R[\phi(x(r))]\,dr - 2\int_0^R k(r)x(r)\,dr - C\left(2\int_0^R x(r)\,dr\right)\right\} \tag{8$'$}$$

と書き改められる。

さて，$x(r)$に関して W の最大化を図れば，必要条件

$$\phi'(x(r)) = k(r) + C' \tag{14}$$

がしたがう。(14)式は，当該財の消費からの限界効用が，生産者の生産と輸送との限界費用に均等化することを示唆している。

次に，R に関して W の最大化を図れば，Leibniz ルールの適用を通じて

$$R\{\phi(x(R)) - k(R)x(R) - C'\cdot x(R)\} - \left\{\int_0^R[\phi(x(r)) - k(r)x(r)]\,dr - C\right\} = 0 \tag{15}$$

がしたがう。ここで，(14)式を(15)式に代入すれば，(15)式は

$$\begin{aligned} &R[\phi(x(R)) - x(R)\phi'(x(R))] - \int_0^R[\phi(x(r)) - x(r)\phi'(x(r))]\,dr \\ &\quad - C'\cdot\int_0^R x(r)\,dr + \frac{1}{2}C = 0 \end{aligned} \tag{15$'$}$$

と変形される。

いま，生産の平均費用を限界費用と均等化させ，平均費用を最小化させる企業間距離を $\hat{R}$ とすれば，直ちに

$$C\left(2\int_0^{\hat{R}} x(r)\,dr\right) = 2\int_0^{\hat{R}} x(r)\,dr\cdot C' \tag{16}$$

がしたがう。しかるに，(16)式を代入すれば，(15)$'$式の左辺第 3 項はゼロとなる。しかるに，(15)$'$式左辺第 2 項 $\phi(x(r)) - x(r)\phi'(x(r))$ を x で微分すれば

$$\frac{d}{dx}(\phi - x\phi') = -x\phi''(>0) \tag{17}$$

がしたがい，ϕ が x の凹函数$(\phi''<0)$であるとき，正の符号をとる。

したがって，(15)$'$式の左辺の表現は，$R=\hat{R}$ において

$$\widehat{R}[\phi(x(\widehat{R}))-x(\widehat{R})\phi'(x(\widehat{R}))]-\int_0^{\widehat{R}}[\phi(x(r))-x(r)\phi'(x(r))]dr<0 \tag{18}$$

を導く。(18)式は，社会的厚生函数 W は，企業間均衡距離 $\widehat{R}$ において減少函数を成すことを意味している。

以上から，すべての立地位置に対し，正の消費がなされ，加重函数が一意の値 $\lambda(r)\equiv\mu$ をとるところでは，自由参入をともなう競争市場の下での企業間均衡距離 $\widehat{R}$ は，社会的厚生の最大化をもたらす最適距離 R^* に比して過大となることが帰結される。かかる帰結は，前項の工場引渡し価格の場合における帰結と定性的に同値となる。(**図-1**が，そのまま妥当する。)

ところで，工場引渡し価格と統一引渡し価格の下における利潤水準が空間的独占企業においては，同一となることをみておこう。[4)]

まず，２つの価格の特定化を行っておこう。

p を工場引渡し価格，c を平均費用，F を固定費用，k を単位輸送費用とすれば，消費者が直面する消費者価格 $p(r)$ は，

$$p(r)=p+k\cdot r \tag{19}$$

で表わされる。ここで，消費者の需要函数を

$$x=a-bp(r) \tag{20}$$

と線型化する。しかるに，議論の明確化のために

$$a=b=k=1,\ c=0$$

と特定化する。

さらに，$\phi(r)$ を距離に依存する需要密度，R を市場半径，そして，q を統一引渡し価格とする。

工場引渡し価格の下での独占企業の最大利潤 $\Pi^+(p)$ は

$$\Pi^+(p)=\max_{0\le p\le 1} p\int_0^{1-p}[1-(p+r)]\phi(r)dr-F \tag{21}$$

で表わされ，統一引渡し価格の下での最大利潤 $\Pi^+(q)$ は，

$$\Pi^+(q)=\max_{0\le q\le 1}(1-q)\int_0^{q}(q-r)\phi(r)dr-F \tag{22}$$

で表わせる。

ここで，工場引渡し価格と最大需要水準（＝1）との乖離幅を v とすれば

$$v=1-p \tag{23}$$

$$\text{or}\quad p=1-v \tag{24}$$

と一次変換される。(24)式を(21)式に代入すれば，(21)式の問題は，(22)式の問題に変換される。すなわち，乖離幅 v は統一引渡し価格と恒等的に等しくなり，両者の問題は数学的に同値をとなる。このとき，最適工場引渡し価格 $\widehat{p}$ と最適統一引渡し価格 $\widehat{q}$ の間に

$$\hat{p}+\hat{q}=1 \tag{25}$$

なる関係がしたがう。したがって，同一利潤と同一市場範囲

$$R=1-\hat{p}=\hat{q} \tag{26}$$

がもたらされる。

一般ケースにおいては，最適工場引渡し価格 $\hat{p}$ は

$$\max_{p}(p-c)\int_{0}^{(a-bp)/bk}(a-bp-bkr)\phi(r)dr-F \tag{27}$$

を解く解として決定され，最適統一引渡し価格 $\hat{q}$ は

$$\max_{q}(a-bq)\int_{0}^{(q-c)/k}(b-c-kr)\phi(r)dr-F \tag{28}$$

を解く解として決定される。しかるに，一次変換は，

$$p=\frac{a}{b}+c-v \tag{29}$$

で表わされ，(27)式に代入し，v と q の同値性を考慮すれば，(27),(28)式の問題が数学的に同値となることが確かめられる。

ここで，市場半径 R を所与とする価格づけを設定しよう。価格先導者の価格を他の追随者が採用するとき，あるいは，企業が市場シェア，すなわち市場エリアの維持を図るとき，かかる設定は妥当する。

このとき，問題は，工場引渡し価格に対し

$$\max_{p} p\int_{0}^{R}[1-(p+r)]\phi(r)dr-F \tag{30}$$

で表わされ，統一引渡し価格に対し

$$\max_{q}(1-q)\int_{0}^{R}[q-r]\phi(r)dr-F \tag{31}$$

で表わされ，両者の問題に，同一水準の R を適用すれば，同一問題となる。かかる情況は R が最大利潤をゼロとする自由参入の場合に妥当する。

1） Lösch［16］参照。
2） 例えば，区間［0,1］に一様分布が適用される場合が想起されよう。
3） 政治的介入の余地も想定し得る。
4） 以下の議論について，Beckmann＝Ingene［11］参照。

第２節　発散法則と勾配法則

1．発散と勾配――流体力学的接近

本節では，価格，取引の方向と規模が空間的に拡張された空間経済における発散法則と勾配法則の意義をベクトル場の文脈の中で検討する。

本項では，ベクトル場における発散（divergence）と勾配（gradient）の意義を流体力学の文脈の中で検討する。[5)]

いま，流体が発生も消滅もしない，すなわち，源点（source）も沈点（sink）も存在しない領域 R における流体の運動を考える。流体状態というとき，気体，蒸気も含まれる。限定的な意味での流体，すなわち，水，油のごとき液体は，気体，蒸気と異なり僅かな圧縮性（compressibity）しかもたない。体積１単位当たりの質量である密度（density）を ρ とし，大きな圧縮性をもつ気体，蒸気のごとき流体を想定しよう。このとき，密度 ρ は，座標空間 (x, y, z)（時に，時間 t を含めて）で表わされる。

さて，**図-2**は[6)]，座標軸に平行な短い辺 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ をもつ長方体を成す箱 B を描いている。箱 B の体積 ΔV は，$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ で表わされる。ここで，ベクトル (v_1, v_2, v_3) を想定する。座標系の基底を成す単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いれば，

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \tag{32}$$

がしたがう。これを運動速度とみなすものとする。(**図-3**参照[7)])。いま，

$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k} \tag{33}$$

と設定し，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は，x, y, z および時間 t の連続的に微分可能なベクトル函数とする。[8)]

ここで，境界を越えて流出（flux）する，すなわち，単位時間当たりの B から出ていく総質量を想定するとき，B に含まれる質量の変化をみてみよう。

まず，箱 B の見える面のうち，面積が $\Delta x \cdot \Delta z$ となる左手前の面を通しての流出（入）を考える。このとき，$v_1\boldsymbol{i}, v_3\boldsymbol{k}$ はこの面に平行であるから $\mathbf{v}$ の成分 v_1, v_3 は，この流出（入）に何ら寄与しない。したがって，短い時間間隔 Δt の間に，当該面を通して流入する流体の質量は，

$$(\rho v_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t \tag{34}$$

で近似される。ただし，添字 y は，左手前の面を指す。同一時間間隔の間に反対面を通して流出する流体の質量は，

$$(\rho v_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t = (v_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t \tag{35}$$

で近似される。ただし，添字 $y + \Delta y$ は，左手前の反対面を指す。ここで，流出と流入の差は，

$$\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y \tag{36}$$

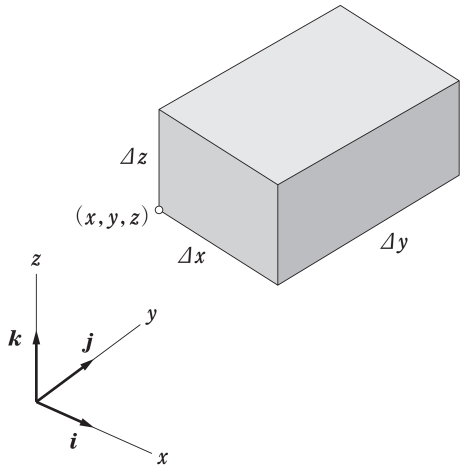

図-2

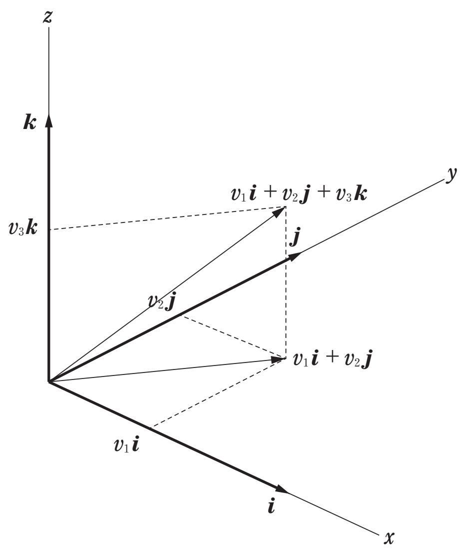

図-3

で表わされる。したがって，$\Delta x\Delta z=\Delta V/\Delta y$ を考慮すれば，

$$\Delta u_2\Delta x\Delta z\Delta t=\frac{\Delta u_2}{\Delta y}\Delta V\Delta t \tag{37}$$

がしたがう。(37)式は，総流出の近似値を与える。

同様の議論を，箱 B の他の対を成す 2 組の面に適用すれば，時間間隔 Δt の間における B の質量の総減少量は

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_1}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} \right) \Delta V \Delta t \tag{38}$$

で近似される。ただし，

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \tag{39}$$

$$\Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z \tag{40}$$

である。しかるに，上の B の総質量は，質量の時間変化率を $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ とすれば，

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t \tag{41}$$

に等しい。(38)，(41)式を均等化し，$\Delta V \Delta t$ で除し $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ および Δt をゼロに近づけると

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{42}$$

がしたがう。しかるに，(42)式の左辺の表現は，発散（divergence）に相当し，$\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ で表わされる。したがって

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{43}$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{44}$$

がしたがう。(44)式の関係は，質量保存条件（condition for the conservation of mass），あるいは，圧縮可能流体フローの連続性方程式（continuity equation of a compressible fluid flow）と呼ばれる。

ところで，かかるフローが時間から独立な定常状態（steady state）にあれば，$\partial \rho / \partial t = 0$ がしたがい，連続性方程式は，

$$\mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{45}$$

を導く。さらに，もし，密度 ρ が一定であれば，流体は圧縮不能となり，(45)式は，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{46}$$

と表現し直される。(46)式の関係は，圧縮不能条件（condition of incompressibility）として知られるそれであり，所与の容量の下で流出入の差が常にゼロであることを意味している。しかるに，かかる結論は，領域 R において，流体が発生も消滅もしない，すなわち，源点も沈点も存在しないという仮定に決定的に依存している。

以上から，略述すれば，発散は，純流出量の尺度を与えると帰結されよう。

ところで，発散は，ベクトル場からスカラー場を導くことを可能にするものでもあり，逆に，スカラー場からベクトル場を導くことを可能にするものとして勾配（gradient）がある。

いま，スカラー函数 $f(x, y, z)$ を考える。f は，また，ポテンシャル函数（potential function），あるいは，単に，ポテンシャル（potential）と呼ばれることもある。

スカラー函数 $f(x, y, z)$ の勾配（gradient）は，

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{47}$$

で定義されるベクトル函数である。勾配は，曲面 S のある点 P における接平面上のすべてのベクトルと直交するベクトルとなる。(47)式を，さらに，それぞれの成分に関して微分すれば，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{48}$$

がしたがい，勾配の発散を表わし，その表現は，Laplacian と呼ばれる。

さて，次に，源点（source），沈点（sink）の意義を再び流体力学の文脈で検討する。

いま，ベクトル函数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ を考える。直ちに，発散

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{49}$$

がしたがう。

ある境界 S をもつ閉有界領域を T とし，連続であり，かつ，T を含むある定義域において連続的な１次偏微係数をもつベクトル函数を $F(x, y, z)$ とするとき，［**Gauss 発散定理**］（Divergence Theorem of Gauss）は，

$$\iiint_T \mathrm{div}\,\boldsymbol{F} dV = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} dA \tag{50}$$

がしたがうことを主張する。

しかるに，xy 平面における領域 R の面積 A は，２重積分によって

$$A = \iint_R dxdy \tag{51}$$

で与えられる。また，曲面 $z = f(x, y)\,(>0)$ の下部，ないし，xy 平面における領域 R の上部の体積 V は，

$$V = \iint_R f(x, y)\, dxdy \tag{52}$$

で与えられる。（**図-4**参照[9]。）しかるに，(51)式を考慮すれば，(52)式の２重積分は，

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \iint_R f(x, y)\, dA \tag{53}$$

で表わされる。

ここで，ベクトル函数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)$ を想定し，$\boldsymbol{N}$ の単位法線ベクトル（unit normal vector）$\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/|\boldsymbol{N}| \tag{54}$$

で表わす。いま，$\boldsymbol{n}$ と各座標軸との角度をそれぞれ，α, β, γ とすると，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{i}$ の間の角度は，

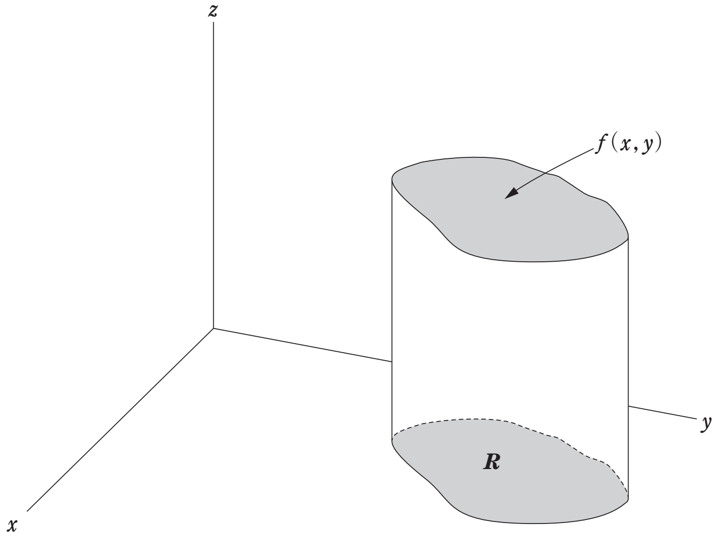

図-4

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}/|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|=\cos\alpha \tag{55}$$

で表わされる。$\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ についても，同様に $\cos\beta,\cos\gamma$ がしたがう。したがって，

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA=\iint_S(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dA \tag{56}$$

で表わされ，$\cos\alpha dA=dydz,\cos\beta dA=dzdx,\cos\gamma dA=dxdy$
と書けるから，(56)式は，

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA=\iint_S F_1dxdz+F_2dzdx+F_3dxdy \tag{57}$$

と表現される。

以上から，［Gauss 発散定理］は，

$$\iiint_T\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_S(F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy) \tag{58}$$

と表現し直される。上の定理は，３重積分と２重積分の間の変換の可能性を主張するそれでもある。

さて，上の発散定理を適用して源点，沈点の意義をみてみよう。

いま，時間を通じて変化しない定常的密度 $\rho=1$ をもつ圧縮不能流体のフローを考える。かかるフローは，領域の任意の点における速度ベクトル場によって決定される。

領域 T の境界面を S とし，さらに $\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトルとする。このとき，$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は，$\boldsymbol{n}$ の方向での $\mathbf{v}$ の直交成分となり，$|\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}dA|$ は，$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}>0$ $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}<0)$ ならば，面積 $\varDelta A$ の S の微少部分 $\varDelta S$ を通して単位時間当たり P において T から流出（T に流入）する流量の合計は，面積分

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{59}$$

で与えられる。T を体積 V で除するとき，T からの平均流出量は

$$\frac{1}{V}\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{60}$$

で表わされる。しかるに，フローが定常的で流体が圧縮不能と仮定されているから，外への流出分は連続的に供給(補填)されていなければならない。

もし，(60)式の積分値がゼロでなければ，T において流体が生成されるか消滅する点，すなわち源点（source）が沈点（sink）が存在しなければならない。また，もし，T を T 内の不動点 P に収縮させると(60)式から，流出点 P での密度が

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}(P)=\lim_{d(T)\to 0}\frac{1}{V(t)}\iint_{S(T)} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{61}$$

で与えられる。したがって，定常的圧縮不能なフロー速度ベクトル $\mathbf{v}$ の発散は，対応する点におけるフローの流出密度となる。

かかる流出点を源点（source），流入点を沈点（sink）と呼ぶ。したがって，T に源点が存在しないことと $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ が T のすべての点でしたがうこととが同値となる。以上から，T の任意の閉表面に対して，

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}dA=0 \tag{62}$$

がしたがう。さらに言い換えれば，発散がゼロのときに限り，源点ないし沈点が存在しないことが帰結される。

最後に，２重積分における変数変換の可能性をみておこう。

まず，定積分において，例えば，x から u への変数変換は，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}du \tag{63}$$

にしたがって実行される。ここで，$x=x(u)$は，連続かつ$x(\alpha)=a, x(\beta)=b$(ないし，$x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$)となり，u が α と β の間を変化すると$x(u)$が a と b の間を変化するような領域 $\alpha\le u\le\beta$ において連続な微係数をもつものとする。

また，２重積分において，x, y から u, v への変数変換は，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\iint_{R^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \tag{64}$$

にしたがって実行される。このとき，

$$J\equiv\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{65}$$

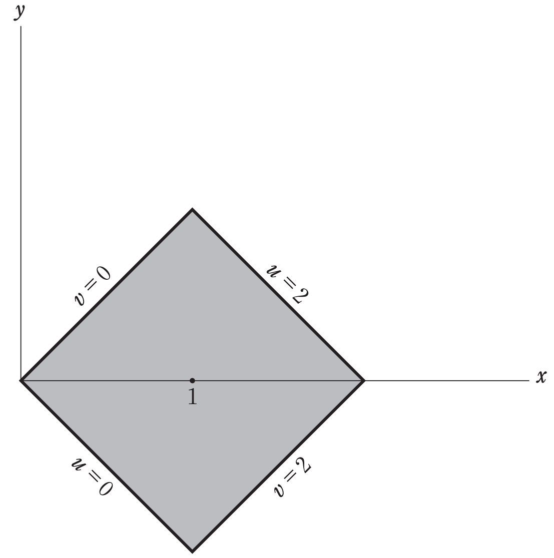

図-5

がしたがう。(65)式は，Jacobian 行列の絶対値に相当する。すなわち，被積分函数が u, v のタールで表わされ，$dxdy$ は，$dudv$ と Jacobian 行列の絶対値の積に置き換えられる。このとき，R^*は，uv 平面のある領域を表わす。すべての$(u, v) \in R^*$に対して，対応する点(x, y)が R 内に存在する，また，逆に，すべての$(x, y) \in R$ に対して，対応する点(u, v)が R^*内に存在するような uv 平面における領域 R^*において，$x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$は連続な偏微係数をもつものと仮定すれば，R^*の全域において，Jacobian J は，正となるか負となるかのどちらかが満たされることが帰結される。

いま，簡単な一例をみておこう。

図-5において[10)]，正方形 R に対する 2 重積分を考える。すなわち，

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy \tag{66}$$

が想定される。正方形 R の形状は，$x + y = u$，$x - y = v$ なる変換を示唆する。直ちに，$x = \frac{1}{2}(u + v)$，$y = \frac{1}{2}(u - v)$がしたがい，Jacobian 行列

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{67}$$

がしたがう。しかるに，R は，正方形 $0 \leq u \leq 2$，$0 \leq v \leq 2$ に対応するから

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{1}{2}\, dudv = \frac{8}{3} \tag{68}$$

を得るごとくである。

2. 発散法則と勾配法則

本項では，前項の数学的準備の下で，発散法則と勾配法則を導いた後，競争市場による接近法と計画によるそれの同値性を確かめる。[11)]

まず，財の需要と供給を各々の立地位置の地区密度，すなわち，単位地区当たりの財の物理的数量で与えよう。農産品，野菜食品，食肉，魚介はもとより，羊毛，綿花，その他繊維品も，ここで生産され消費される財に含められる。さらに，労働力も一資源として勘定に入れられる。このとき，財の需要と供給の均等化のために貨幣の輸送も考慮される。

さて，言うまでもなく，閉地区内の空間市場が均衡を実現し得るためには，財の需要と供給が集計量において均等化することが必要かつ十分条件となる。

いま，当該財の超過需要を q とするとき，超過需要密度は，立地位置 x_1, x_2 の函数，すなわち，位置函数となり，

$$q = q(x_1, x_2) \tag{69}$$

で表わされ，閉地区 A における空間市場の均衡条件は，

$$\iint_A q(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{70}$$

で与えらえる。このことは，すべての地区において

$$q(x_1, x_2) \equiv 0 \tag{71}$$

が成立することを意味する。

ここで，地区間の交易取引における財の移動は，連続的フロー場（flow field）で表わされる，すなわち，各地区において財が交易を通じて移動する明確な方向（direction）と各財フローに対応する移動量（volume）が存在し，その両者が地区フロー・ベクトル $\phi(x_1, x_2)$ を定義するものとする。

ところで，フロー場と地区超過供給の間の関係は流体フローとその源点（source），沈点（sink）の間のそれに対応し，前項の議論から，超過供給は，発散に均等化する，すなわち，

$$\begin{aligned} -q(x_1, x_2) &= \operatorname{div} \phi(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{72}$$

なる関係がしたがう。このとき，$\phi = (\phi_1, \phi_2)$ は，フロー・ベクトルを成す。(72)式は，財ストックが留保される任意の空間体系にとっての必要条件を与える。

さらに，財のフローが区域 A の境界を越えないための条件は，境界 ∂A において，

$$\phi_n = 0 \quad \text{on } \partial A \tag{73}$$

の形で表わされる。n は，境界に直交する方向で外向きを成す方向を表わし，ϕ_n は，その方向の

ベクトル成分である。(73)式の表現は，境界を越える財の流入，流出がいずれの境界においても存在しないことを意味している。(72)，(73)式の条件は，発散法則（divergence law）と呼ばれる。

上の発散条件は，財のストックが留保される空間体系にとっての必要条件であったが，物理的な限定を表わすだけで経済的含意をもっていない。競争市場経済における経済メカニズムの機能性は，別の原理に恃まなければならない。すなわち，勾配法則（gradient law）がそれである。

ところで，需要，供給が所与の下で，完全競争の下で空間市場，すなわち，空間に拡張した市場において財が効率的に配分されることは，総輸送費用が最小化されることを意味する。

いま，位置 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ において，単位距離にわたる財１単位の輸送費用を $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ とし，$\lambda(\boldsymbol{x})$ を位置の函数としての財価格とする。財１単位を２つの隣接し合う位置の間で取引するときの利得は，両位置間の方向 ϕ と距離 ds に分離され，

$$D_\phi \lambda(x) ds \tag{74}$$

で表わされる。ただし，D_ϕ は，方向 ϕ における方向微係数（directional derivative）を表わす。

しかるに，ベクトル ϕ の方向における地点 P での函数 $\lambda(x,y,z)$ の方向微係数 D_ϕ は，変動地点 Q に対し，

$$D_\phi \lambda = \frac{d\lambda}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{\lambda(Q)-\lambda(P)}{s} \tag{75}$$

で与えられる。しかるに，$\lambda(x,y,z)$ を $\lambda(x(s), y(s), z(s))$ と表現し直せば，

$$D_\phi \lambda = \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}x' + \frac{\partial\lambda}{\partial y}y' + \frac{\partial\lambda}{\partial z}z' \tag{76}$$

がしたがう。ただし，$x' = \partial x/\partial s$ 等である。ここで，地点 P の位置ベクトルを p_0 とし，単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いれば，

$$p_0 + s\phi = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \tag{77}$$

がしたがうから，両辺を s に関して微分すれば

$$\phi = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} \tag{78}$$

を得る。したがって，勾配

$$\mathrm{grad}\,\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{79}$$

を想起すれば，(76)式は，$\mathrm{grad}\,\lambda$ と ϕ との内積に外ならず

$$D_\phi \lambda = \frac{d\lambda}{ds} = \phi\,\mathrm{grad}\,\lambda \tag{80}$$

がしたがう。

ところで，競争市場均衡において取引からの利得が輸送費用を越えることはできない。いま，単位輸送費用を k とすると，輸送費用は，kds となり，

$$D_\phi \lambda ds \leq kds \tag{81}$$

が，フロー ϕ のすべての可能な方向に対し成立しなければならない。しかるに，ϕ が grad λ と平行であるとき，すなわち

$$\phi = \frac{\mathrm{grad}\,\lambda}{|\mathrm{grad}\,\lambda|} \tag{82}$$

であるとき，勾配微係数 $D_\phi \lambda$ は最大となり

$$D_\phi \lambda = \phi\,\mathrm{grad}\,\lambda = \frac{|\mathrm{grad}\,\lambda|^2}{|\mathrm{grad}\,\lambda|} = |\mathrm{grad}\,\lambda| \tag{83}$$

がしたがう。したがって，(81)式は，

$$|\mathrm{grad}\,\lambda| \leq k \tag{84}$$

を導く。取引が実行されるためには，すべての取引者が損失を蒙ってはならない。したがって，(84)式は等号で成立しなければならず，(84)式は，

$$|\mathrm{grad}\,\lambda| = k,\ \text{where}\quad \phi \neq 0 \tag{85}$$

で置換えられる。さらに，ϕ が grad λ に平行となる事実を考慮すれば，直ちに，

$$k\frac{\phi}{|\phi|} = \mathrm{grad}\,\lambda \tag{86}$$

がしたがう。(86)式は，空間市場の価格均衡条件を与えており，勾配法則（gradient law）と呼ばれる。

上の発散法則が数量的変数の間の関係を定義するのに対し，勾配法則は，貨幣的変数間のそれを定義する。ここに，両法則によって空間市場の価格均衡が表示されることが帰結される。

ところで，上の勾配法則は，発散法則を制約条件とする輸送費用最小化の問題として導くことができる。競争市場型接近法に対して計画型接近法と呼べるかもしれない。

問題は

$$K = \max_{\phi} \iint k|\phi| dx_1 dx_2 \tag{87}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \mathrm{div}\,\phi + q = 0 && \text{in } A \\ & \phi_n = 0 && \text{on } \partial A \end{aligned} \tag{88}$$

で表わされる。

いま，(87)式にマイナス 1 を乗じ，最小化問題を最大化問題に変換し，成分表示すれば，(87)式は，

$$-K = \max_{\phi_1, \phi_2} \iint \left[-k\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + q\right)\right] dx_1 dx_2 \tag{89}$$

と書き改められる。ここで，$\phi_i (i = 1, 2)$ を制御変数として変分法（calculus of variations）を適用す

れば，Euler 方程式

$$-k\frac{1}{2}(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\phi_i-\frac{\partial\lambda}{\partial\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}=0 \tag{90}$$

$$i=1,2$$

$$\text{or}\quad -k\frac{\phi_i}{(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \tag{91}$$

がしたがう。ここで，ベクトル表示に戻せば，(91)式は，

$$k\frac{\phi}{|\phi|}=\mathrm{grad}\,\lambda \tag{92}$$

と表わされる。(92)式は，(86)式に他ならないことは言うまでもない。

ここで，解 $\frac{\phi}{|\phi|}$ の一意性を確かめておこう。

まず，$|\phi|$ が ϕ の凸函数であることを見よう。

いま，$0<\alpha<1$ なる α に対し

$$\alpha|\phi|+(1-\alpha)|\psi|\leq|\alpha\phi+(1-\alpha)\psi| \tag{93}$$

と想定する。ただし，ψ はもう 1 つの勾配の場である。ここで，(93)式の両辺を 2 乗すると，

$$(\alpha|\phi|+(1-\alpha)|\psi|)^2\leq|\alpha\phi+(1-\alpha)\psi|^2 \tag{94}$$

$$\text{or}\quad \alpha^2|\phi|^2+2\alpha(1-\alpha)|\phi||\psi|+(1-\alpha)^2|\psi|^2\leq\alpha^2|\phi|^2+2\alpha(1-\alpha)\phi\psi+(1-\alpha)^2|\psi|^2 \tag{95}$$

がしたがい，さらに，(95)式は，

$$2\alpha(1-\alpha)|\phi||\psi|\leq 2\alpha(1-\alpha)\phi\psi \tag{96}$$

と簡単化される。しかるに，Cauchy-Schwartz 不等式を適用すれば，(94)式の関係は ϕ と ψ が平行であるときを除き成立しない。

ここで，２つの勾配の場 ϕ,ψ は，

$$k\frac{\phi}{|\phi|}=\mathrm{grad}\,\lambda\quad\text{in } A \tag{97}$$

$$\phi_n=0\qquad\text{on } \partial A \tag{98}$$

$$k\frac{\psi}{|\psi|}=\mathrm{grad}\,\mu\quad\text{in } A \tag{99}$$

$$\psi_n=0\qquad\text{on } \partial A \tag{100}$$

を満たす解であるものとする。λ は ϕ に対応するポテンシャルであり，μ は ψ に対応するそれである。いま，$0<\alpha<1$ なる α に対して

$$\eta=\alpha\phi+(1-\alpha)\psi \tag{101}$$

を想定すれば

$$\eta_n=\alpha\phi_n+(1-\alpha)\psi_n=0 \quad \text{on } \partial A \tag{102}$$

がしたがい，さらに，

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\eta&=\alpha\operatorname{div}\phi+(1-\alpha)\operatorname{div}\psi\\&=-\alpha q-(1-\alpha)q=-q\end{aligned} \tag{103}$$

がしたがう。したがって，η は発散法則を満たしている。

ここで，目的函数の値は，

$$\iint k\,|\,\eta\,|\,dx_1dx_2=\iint k\,|\,\alpha\phi+(1-\alpha)\psi\,|\,dx_1dx_2<\alpha\iint k\,|\,\phi\,|\,dx_1dx_2+(1-\alpha)\iint k\,|\,\psi\,|\,dx_1dx_2 \tag{104}$$

を満たし，不等号は ϕ と ψ が平行でない限り，凸函数を成すとする上の帰結からしたがう。しかるに，この不等式は，目的函数が

$$K=\iint|\,\phi\,|\,dx_1dx_2=\iint|\,\psi\,|\,dx_1dx_2 \tag{105}$$

において最小化される仮定と矛盾する。したがって，ϕ と ψ は平行でなければならない。

さて，A のすべての点において，$\phi\fallingdotseq 0$ がしたがうものとする。このとき，

$$\operatorname{grad}\lambda=k\frac{\phi}{|\,\phi\,|}=\operatorname{grad}\mu \tag{106}$$

がしたがう。しかるに，A のすべての点における解

$$\operatorname{grad}(\lambda-\mu)=0 \tag{107}$$

は，

$$\lambda=\mu+\text{const.} \tag{108}$$

を意味する。このことは，解 $\phi/|\,\phi\,|$ が一意に決定されることを示唆している。さらに，ϕ が特異点にない，すなわち，消滅することがないとき，λ は，正一次変換まで一意であることを帰結する。

5）本項における数学的展開の多くを Kreyszig［15］に負う。
6）Kreyszig, *op. cit.*, Fig. 216（p. 412）に準ずる。2 次元の議論として，Beckmann＝Puu［13］，Appendix（pp. 257–8），Zhang［26］（Chap. 8）参照。
7）Kreyszig. *op. cit.*, Fig. 175（p. 369）に準ずる。
8）このことは，連続な 1 次偏微分係数をもつことを意味する。
9）Kreyszig. *op. cit.*, Fig. 229（p. 435）に準ずる。
10）Kreyszyg, *op. cit.*, Fig. 230（p. 437）に準ずる。
11）本項の議論は，Beckmann＝Puu［13］（Chap. 2），Beckmann［2］，Puu［21］，［22］に負う。

第３節　短期的均衡と長期的均衡

1．短期的均衡

本節では，輸送費用を含む空間市場経済における短期的均衡と長期的均衡のあり方とその効率性をみる。

本項では，輸送費用を含む空間市場経済の短期的均衡のあり方とその効率性をみる。[12)]

空間市場において，短期，中期，そして長期の期間区分がなされ得る。短期においては，一定の供給量が競争的需要者の間で配分される。中期においては，ファシリティの供与の拡大ないし縮小が可能となり，長期においては，ファシリティの新立地位置への導入，旧立地位置からの撤去の可能性が考慮される。本項では，短期の期間における市場競争のあり方とその効率性をみる。

さて，地区の価格（ポテンシャル）λ は，正一次変換まで一意であることは，既に述べたところである。いま，地区の超過需要は，地区価格 λ にも依存し，超過需要函数は

$$q=q(\lambda, x_1, x_2) \tag{109}$$

で表わされ，その価格 λ の下で，発散法則

$$\operatorname{div}\phi(x_1, x_2)+q(\lambda, x_1, x_2)=0 \tag{110}$$

がしたがうものとする。ここで，超過需要函数は，λ の厳密な減少函数である，すなわち

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda}<0,\ \text{all}\ \lambda, x_1, x_2 \tag{111}$$

がしたがうものとする。

まず，価格 λ は，すべての地区を通じて一意となることを確かめておこう。いま，２つの解

$$k\frac{\phi}{|\phi|}=\operatorname{grad}\lambda \tag{112}$$

$$k\frac{\psi}{|\psi|}=\operatorname{grad}\mu \tag{113}$$

が成立するものとし，さらに，ϕ, ψ 境界条件を満たしており，したがって，境界条件

$$\int(\lambda-\mu)(\phi_n-\psi_n)\,ds=0 \tag{114}$$

がしたがうものとする。

ここで，Gauss 定理を適用すれば

$$\int_{\partial A}(\lambda-\mu)(\phi-\psi)_n\,ds=\iint_A \operatorname{div}[(\lambda-\mu)(\phi-\psi)]\,dx_1\,dx_2$$

$$=\iint_A (\phi-\psi)\,\mathrm{grad}(\lambda-\mu)+(\lambda-\mu)\,\mathrm{div}(\phi-\mu)\,dx_1\,dx_2 \tag{115}$$

がしたがう。しかるに，

$$k\frac{\phi}{|\phi|}\fallingdotseq \mathrm{grad}\,\lambda \tag{116}$$

がしたがうところでは，常に，ϕ が消滅し，同じことが ψ にも妥当する。

ϕ, ψ が積分に寄与するのは，消滅しない場合のそれのみであるから，上の（112），(113)式を通して，$\mathrm{grad}(\lambda-\mu)$ は $\left(\frac{\phi}{|\phi|}-\frac{\psi}{|\psi|}\right)$ に置換えられ，（115）式は

$$\iint k(\phi-\psi)\left(\frac{\phi}{|\phi|}-\frac{\psi}{|\psi|}\right)+(\lambda-\mu)\,\mathrm{div}(\phi-\psi)\,dx_1\,dx_2=0 \tag{117}$$

と変形される。ここで，（117）式を（110）式に代入すれば，（117）式は，

$$\iint k(\phi-\psi)\left(\frac{\phi}{|\phi|}-\frac{\psi}{|\psi|}\right)+(\lambda-\mu)[-q(\lambda)+q(\mu)]\,dx_1\,dx_2 \tag{118}$$

を導く。しかるに，前項の一意性の議論から（118）式の第 1 項は非負であり，

$$\frac{\phi}{|\phi|}=\frac{\psi}{|\psi|} \tag{119}$$

がしたがうときに限り，ゼロとなる。

したがって，

$$-\iint(\lambda-\mu)[q(\lambda)-q(\mu)]\,dx_1\,dx_2\leqq 0 \tag{120}$$

がしたがう。しかるに，q は，仮定より価格の減少函数であるから

$$\begin{aligned}&(\lambda-\mu)[q(\lambda)-q(\mu)]\leqq 0\\ &\qquad\qquad = 0, \quad \text{only if}\quad \lambda=\mu\end{aligned} \tag{121}$$

がしたがう。このことは，

$$q(\lambda)<(>)\,q(\mu)\quad \text{if}\quad \lambda<(>)\,\mu \tag{122}$$

を意味する。したがって，（120），(121)式から

$$0\geqq\iint(\mu-\lambda)[q(\lambda)-q(\mu)]\,dx_1\,dx_2\geqq 0 \tag{123}$$

がしたがい，

$$\lambda(x_1,x_2)\equiv\mu(x_1,x_2) \tag{124}$$

が確かめられる。

以上から，超過需要が価格の減少函数であるならば，いずれの均衡価格の分布も一意となることが帰結される。

次に，供給量一定の下での短期的均衡の効率性をみてみよう。

まず，簡単化のために超過需要函数を線型化し，

$$q(p, x_1, x_2) = a(x_1, x_2) - bp \tag{125}$$

で表わそう。ただし，p は一意の価格，切片 $a(\cdot)$は，立地位置に依存する需要部分，b は定数であるものとする。しかるに，閉地域においては，

$$\iint q(p, x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint a(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 - b \iint p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{126}$$

がしたがわなければならない。(126)式から

$$\bar{p} = \frac{\bar{a}}{b} \tag{127}$$

がしたがう。ただし，$\bar{p}, \bar{a}$ は，それぞれ，平均価格,平均切片であり，

$$\bar{p} = \frac{\iint p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2}{\iint dx_1\, dx_2} \tag{128}$$

$$\bar{a} = \frac{\iint a(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2}{\iint dx_1\, dx_2} \tag{129}$$

で表わされる。したがって，平均価格は平均切片に比例する。

ここで，消費者余剰（consumers' surplus）を定義するために，需要函数を積分することによって効用函数を導くことにしよう。

(125)式を

$$p = \frac{a - q}{b} \tag{130}$$

と変形すれば，効用函数は，

$$u = \int_0^q \frac{a - \eta}{b}\, d\eta = \frac{a}{b} q - \frac{1}{2} \frac{q^2}{b} \tag{131}$$

で表わされる。

しかるに，社会的厚生を社会的余剰(social surplus)，すなわち，消費者余剰と生産者余剰(利潤)との和で表わし，消費者と生産者間の移転部分を相殺すれば，社会的厚生の最大化は，需要函数から輸送費用を差し引いた差の積分値の最大化と同値となる。すなわち，問題は，

$$\max_{q,\phi}\iint\left[\frac{a(x_1,x_2)}{b}q-\frac{1}{2b}q^2-k|\phi|\right]dx_1dx_2 \tag{132}$$

$$s.t.\quad \operatorname{div}\phi(x_1,x_2)+q(\lambda,x_1,x_2)=0 \tag{133}$$

で表わされる。しかるに，(133)式を用いて，q を消去すれば，(132)式は，

$$\max_{\phi}\iint\left[-\frac{a}{b}\operatorname{div}\phi-\frac{1}{2b}\operatorname{div}^2\phi-k|\phi|\right]dx_1dx_2 \tag{134}$$

と書き改められる。

いま，(134)式に変分法を適用し，

$$\frac{\partial \operatorname{div}\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial \operatorname{div}\phi}{\partial x_2}=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\phi) \tag{135}$$

$$\frac{\partial k|\phi|}{\partial x_1}+\frac{\partial k|\phi|}{\partial x_2}=k\frac{\phi}{|\phi|} \tag{136}$$

を考慮すれば，Euler 方程式

$$\operatorname{grad}\left[\frac{a}{b}+\frac{\operatorname{div}\phi}{b}\right]=k\frac{\phi}{|\phi|} \tag{137}$$

がしたがう。しかるに，制約条件 $\operatorname{div}\phi=-q=-a+b\lambda$ は

$$\lambda=\frac{a}{b}+\frac{\operatorname{div}\phi}{b} \tag{138}$$

と変形できるから，(137)式は，

$$\operatorname{grad}\lambda=k\frac{\phi}{|\phi|} \tag{139}$$

を導く。(139)式は，市場均衡条件に他ならない。

以上から，輸送費用を考慮した競争的空間市場均衡は，社会的余剰を最大化する，すなわち，効率性条件を満たすことが帰結される。

ところで，需要函数の一般型

$$q=q(\lambda,x_1,x_2) \tag{140}$$

を逆函数

$$\lambda=p(q,x_1,x_2) \tag{141}$$

で表わせば，消費者余剰は，

$$u(q,x_1,x_2)=\int_0^q p(\eta,x_1,x_2)\,d\eta \tag{142}$$

で表わされ，社会的厚生最大化の問題は，

$$\max_{\phi} \iint \left[\iint_0^{-\mathrm{div}\phi = q} p(\eta, x_1, x_2)\, d\eta - k\,|\,\phi\,| \right] dx_1 dx_2 \tag{143}$$

で表わされ，Euler 方程式

$$\mathrm{grad}\, p(q, x_1, x_2) = k \frac{\phi}{|\,\phi\,|} \tag{144}$$

がしたがう。上の効率性の帰結は，一般化され得ることが確かめられる。[13)]

2. 長期的均衡

本項では，輸送費用を含む空間市場経済における長期的均衡のあり方をみる。[14)]

前項の議論においては，超過需要函数は所与とされた。以下では，超過需要函数の基礎を成す生産決定と消費決定を定式化することによって，一般均衡化を図ることにする。

まず，生産者は，資本，労働そして土地を生産要素として１種類の生産物を生産するものとする。しかるに，当該生産物は，消費されると同時に，資本として生産に投資され得るものとする。このとき，企業の生産函数は，

$$Q = F(K, L, M) \tag{145}$$

で表わされる。ただし，Q は産出量，K, L，そして M は，それぞれ，資本，労働，そして土地を表わす。このとき，土地 M は，生産用空間であるだけに留まらず，原材料源としても使用されるものとする。

しかるに，地域科学論の文脈においては，生産活動の密集性，収穫逓増性，外部性，情報交換の容易性等を要因として収穫逓増的生産環境が想定される場合が少なくないごとくである。しかしながら，かかる想定の現実妥当性は必ずしも明確ではない。

さて，上の生産函数を M で除せば

$$\frac{Q}{M} = F\left(\frac{K}{M}, \frac{L}{M}, 1 \right) \tag{146}$$

がしたがう。$\frac{Q}{M} = q, \frac{K}{M} = k, \frac{L}{M} = l$ と設定すれば，(146)式は

$$q = f(k, l) \tag{147}$$

と表現し直される。(147)式は，地区産出量密度が，資本と労働の地区密度に依存することを意味する。ただし，(147)式は，もはや，一次同次性を満たしておらず，以下で，むしろ，収穫逓減性を想定する。

企業は，利潤

$$\pi = pq - rk - wl \tag{148}$$

を最大化するものとする。ただし，p は生産物価格，w は賃金率である。しかるに，生産物が資本として投資されるから資本賃料（capital rent）r は生産物価格に比例し，その比率は一定で資本減耗率に等しいと考えられる。

直ちに，利潤最大化条件

$$f_k(k,l)=r \tag{149}$$

$$f_l(k,l)=w/p \tag{150}$$

がしたがう。しかるに，資本，労働，生産物の密度だけでなく，生産物価格，賃金率は，立地位置 x_1,x_2 の函数となる。このとき，同次函数に関する Euler 定理から，生産物価値は，投入要素の所得シェアに分配され尽くされるから，土地レント，すなわち，地代を g とすれば，

$$PQ=rpK+wL+gM \tag{151}$$

$$\text{or}\quad \frac{g}{p}=q-rk-\left(\frac{w}{p}\right)l \tag{152}$$

がしたがう。(152)式は，実質賃金が，産出量，要素投入量を決定し，さらに，地代‒生産物価格比率 (g/p) を決定することを示唆している。

しかるに，上の定式化において，土地利用に関する最適条件は存在しない。すなわち，地代は，生産における土地の利潤性から残余として決定されることになる。

通常の一般均衡論におけると同様に，所有形態（ownership pattern）が，どの家計がどの企業を保有するのかを示すように特定化されなければならない。しかしながら，無数の企業と家計の存在が想定されるところで，株式保有による企業利潤の分配を想定することは，議論の煩雑化を招くに過ぎず，したがって，以下では，各企業が 1 家計によって保有されるものとする。このとき，保有形態全体が家計の立地位置 (x_1,x_2) と財産のそれ (ξ_1,ξ_2) を連結する写像

$$\xi_1=\xi_1(x_1,x_2) \tag{153}$$

$$\xi_2=\xi_2(x_1,x_2) \tag{154}$$

が定義し得る。

さらに，上の写像の Jacobian 行列 $J(x_1,x_2)$

$$J(x_1,x_2)=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(x_1,x_2)} \tag{155}$$

を定義する。Jacobian 行列は，前節でみたごとく，座標変換の機能をもつ。(155)式は，小矩型部分 dx_1dx_2 に居る家計が，小矩型部分 $d\xi_1d\xi_2=Jdx_1dx_2$ に含まれる財産のすべてを保有することを意味している。家計の貧富のあり方は，J の値の高低に依存する。

さて，家計の非労働所得は，

$$y(x)=g(\xi(x))J(x) \tag{156}$$

で定義される。(156)式は，資本所得は常に再投資され，労働所得は，地区労働者(住民)に支払われ，残余としての地代ないし純利潤は，保有者に帰属する，次いで，Jacobian 行列を通じて家計に支払われることを意味している。いま，(156)式の両辺を積分すれば

$$\iint_A y(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint_A g(\xi_1, \xi_2)\,J(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

$$= \iint_A g(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 \tag{157}$$

がしたがう。(157)式は，集計量として，非労働所得が地代に均等化することを意味しており，写像$\xi(x)$も，座標変換をなす写像として機能していることが確認される。

ところで，家計は，非労働所得と賃金所得(労働所得)から成る予算制約式

$$p\hat{q} + w\hat{l} = y + wL \tag{158}$$

の下に効用の最大化を図るものとする。ただし，$\hat{q}$ は，生産物消費量，$\hat{l}$ は労働消費量，すなわち，余暇（leisure）であり，時間制約

$$\hat{l} = L - l \tag{159}$$

にしたがわなければならない。

消費者の問題は，

$$\max LU(\hat{q}/L, \hat{l}/L) \tag{160}$$

$$s.t. \quad p\hat{q} + w\hat{l} = y + w(l + \hat{l}) \tag{161}$$

で表わされる。最適な消費量，余暇選択が満たすべき 1 階条件は，それぞれ

$$\frac{\partial U}{\partial(\hat{q}/L)} = \lambda p \tag{162}$$

$$\frac{\partial U}{\partial(\hat{l}/L)} = \lambda w \tag{163}$$

で表わされる。ただし，λ は，Lagrange 乗数である。

上の設定において，財産分布位置，保有写像が所与であり，潜在総労働量 L が所与であれば，まず，賃金率が各立地位置における需給バランスから決定され最終的に非労働所得が決定される。

しかしながら，長期的時間視野の下では，L 自体が最適決定の対象となる。したがって，目的函数 $LU(\hat{q}/L, \hat{l}/L)$ を想起すれば，L の増加は，一方で，個々人の所与の効用からの利益の拡大化，したがって目的函数値の増大化をもたらし，他方で，所与の $\hat{q}, \hat{l}$ の下での個々人の効用は，人数増加にともないシェアの低減化に基づき低下する。さらに，潜在労働力時間の増加，したがって，消費，余暇の享受水準の増加にともなう家計の富の増加が予算制約式を通じて見て取れる。相反する効果が作用するところで，L の最適水準を決定しなければならない。すなわち，最適水準自体が最適化の対象とならなければならないことが示唆される。

上の目的函数に対して，L の最適水準が満たすべき 1 階条件

$$\frac{d(LU)}{dL} = U - \frac{\lambda}{L}\left(p\hat{q} + w\hat{l}\right) + \lambda\left(p\frac{d\hat{q}}{dL} + w\frac{d\hat{l}}{dL}\right) = 0 \tag{164}$$

がしたがう。しかるに，所与の p, w の下で，予算制約式から

$$p\frac{d\hat{q}}{dL}+w\frac{d\hat{l}}{dL}=w \tag{165}$$

がしたがい，さらに，(164)式の右辺第２項に予算制約式を代入すれば，(164)式は

$$\frac{d(LU)}{dL}=U-\frac{\lambda y}{L}=0 \tag{166}$$

$$\text{or}\quad LU=\lambda y \tag{167}$$

と簡単化される。さらに，(167)式は，

$$L\frac{dU}{dy}=\lambda \tag{168}$$

を導き，(168)式を，上の最適条件に代入すれば

$$\frac{dU}{dy}\cdot\frac{y}{U}=1 \tag{169}$$

がしたがう。(169)式は，非労働所得，すなわち，財産からの所得に関する１人当たり効用の弾力性が１に等しいことを意味している。

このことは，収穫逓減性の仮定の下で，最適人口が増加すればする程，非労働所得は増加していくことを示唆している。

以上において，生産過程への投入要素に関する均衡のあり方が議論された。ここで，生産物市場の均衡のあり方をみてみよう。

生産物の取引は，輸送，したがって輸送費用への考慮が必要となる。

地区的超過需要と超過供給に応じた取引量の変化のあり方をみるために，生産物の取引のフローを想定し，ベクトル場

$$\phi=(\phi_1(x_1,x_2),\phi_2(x_1,x_2)) \tag{170}$$

を設定する。ただし，方向 $\phi/|\phi|=(\cos\theta,\sin\theta)$ は，フローの方向を表わし，ノルム $|\phi|=(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2)^{\frac{1}{2}}$ は，フロー量を表わす。

いま，生産物取引量の所定の割合が，その輸送に充当され，その割合は，立地位置に依存し，

$$h=h(x_1,x_2) \tag{171}$$

で表わされるものとする。しかるに，割合は方向 θ には依存せず，輸送費用は，等方的（isotropic）であるものとする。[15)]

上の議論を想起すれば，地区輸送費用は $h|\phi|$ で表わされ，金額タームを用いれば，総輸送費用額は

$$T=\iint_A ph|\phi|\,dx_1dx_2 \tag{172}$$

で表わされる。しかるに，q は，地区産出量，$\hat{q}$ は消費量，rk は資本としての再投資量，そして，$h|\phi|$ は，輸送費用充当分となり，超過供給は $q-\hat{q}-rk-h|\phi|$ で示され，したがって，生産物の

地区均衡条件

$$\mathrm{div}\,\phi = q - \hat{q} - rk - h\,|\,\phi\,| \tag{173}$$

がしたがう。しかるに，市場はクリアする必要がなく，その際に超過供給ないし超過需要が地区のフローに含まれ，流出ないし流入をもたらす。

ここで，産出量のすべてを買取り，家計に

$$\iint_A p\,\hat{q}\,dx_1\,dx_2 \tag{174}$$

だけ販売し，投資者に

$$\iint_A rpk\,dx_1\,dx_2 \tag{175}$$

だけ販売し，買取費用

$$\iint_A pq\,dx_1\,dx_2 \tag{176}$$

を支払う輸送企業を想定する。その利潤は，

$$\iint p\,(\hat{q} + rk - q)\,dx_1\,dx_2 \tag{177}$$

で表わされる。フローの均衡条件（(173)式）を想起すれば，(177)式は，

$$-\iint_A p\,(\mathrm{div}\,\phi + h\,|\,\phi\,|\,)\,dx_1\,dx_2 \tag{178}$$

に等しい。ここで，外部性は存在せず，輸送企業は，利潤最大化，すなわち，(178)式の最小化を図るものとすると，再び，変分性の問題となり，Euler 方程式

$$ph\frac{\phi}{|\,\phi\,|} = \mathrm{grad}\,p \tag{179}$$

がしたがう。(179)式は，取引フローの方向のみを特定するが，上の発散方程式が取引フロー量を決定する。

いま，(179)式にϕを乗ずれば

$$ph\,|\,\phi\,| = (\mathrm{grad}\,p)\,\phi \tag{180}$$

がしたがう。(180)式を(178)式に代入すれば

$$\iint_A (p\,\mathrm{div}\,\phi + \phi\,\mathrm{grad}\,p)\,dx_1\,dx_2 \tag{181}$$

を得る。ここで，発散公式 $\mathrm{div}(p\phi) = p\,\mathrm{div}\,\phi + \phi\,\mathrm{grad}\,p$ を代入し，Gauss 定理を適用すれば，

$$\iint_A \mathrm{div}\,(p\phi)\,dx_1\,dx_2 = \iint_{\partial A} p\,(\phi)_n\,ds = 0 \tag{182}$$

がしたがう。しかるに，$(\phi)_n$ は境界と直交する外向きフローを表わしゼロとなるから，流出額 $p(\phi)_n$ とその積分値は，地域全体の純流出余剰額となり，(182)式は，純余剰額がゼロとなることを意味している。

以上から，完全競争の下で自由参入が許される長期的均衡において，輸送企業の純所得はゼロとなり，したがって，生産者，消費者，また当該輸送企業のいずれが輸送サービスを提供する，すなわち輸送費用を負担するかは，重要ではないことが帰結される。

12） 本項の議論の多くを Beckmann＝Puu, *op. cit.*,（Chap. 3）に負う。

13） 離散的空間市場に対する同様な議論として，Samuelson［23］参照。

14） 本項の議論の多くを Beckmann＝Puu, *op. cit.*,（Chap. 4）に負う。

15） Puu［21］（p. 980）参照。

結びにかえて

地域的経済活動に向けられる接近法の１つは，地域経済，都市経済といった枠組を設定し，そこに新古典派的分析手法を適用するそれである。むしろ安定性が当然のこととすら思える均衡が構成され，均衡間の比較，さらには，与件とされる制度的要件の変化にともなう均衡の動向が追求され，最後に，均衡の効率性が問われるごとくである。

上の最初の議論は，新古典的競争市場の枠組の中で，取引される財の輸送費用をめぐる工場引渡し価格と統一引渡し価格の２通りの価格づけの下での立地企業間距離に関するそれぞれの競争均衡が特定化され，その効率性が問われ，いづれの価格づけの下でも，そこでの均衡は，効率性基準を満たし得ず，企業間距離が過大，したがって，企業数が過少に過ぎることを帰結した。

もう１つの接近法は，経済活動がフロー（flow）として展開する空間，すなわちベクトル場を援用する空間力学的接近法である。

立地位置に依存する取引財のフローの場と局所的超過需要の関係を規定する発散法則と，取引者が輸送費用に等しい所得を達成し得る取引方向を示す勾配法則とで競争市場均衡が記述される。しかるに，極く一般的条件の下では，すべての活動が地域内のすべての地区で展開されるとは限らず，むしろ，各地区に唯一の取引財が生産され完全特化が発生する可能性がある。利潤最大化ないし Pareto 最適性基準を満たす企業の最適行動が必ずしも勾配法則と整合する生産（機会）価格を導くことができないことに起因する。

以上にかんがみ，より限定的な条件の下で，短期的市場均衡と長期的市場均衡が特定され，そのいずれも効率性基準を満たすことが結論された。

しかるに，上の結論は，上掲の先駆作業において展開済みであり，上の議論は，その再解釈にすぎないことを付記しなければならない。

References

[1] Å. E. Andersson, and W. B. Zhang, "The Two Dimensional Continuous Spatial Input–Output System," *Ricerche Economiche*, 1988, 42.

[2] M. J. Beckmann, " A Continuous Model of Transportation," *Econometrica*, 1952, 20.

[3] ________, "The Partial Equilibrium of a Continuous Space Market," *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1953, 71.

[4] ________, "On the Equilibrium Distribution of Population in Space," *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1957, 19.

[5] ________, *Location Theory*, Random House, 1968.

[6] ________, "Market Shares and Distance," *Swedish Journal of Economics*, Special Issue in Honor of Tord Palander, 1969.

[7] ________, "The Analysis of Spatial Diffusion Processes," *Papers of the Regional Science Association*, 1970, 25.

[8] ________, "Does Perfect Competition in Spatial Markets Maximize Welfare?", in G. Schwödiaur (ed.), *Equilibrium and Disequilibrium in Economic Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1974.

[9] ________, "Spatial Price Policies Revisited," *Bell Journal of Economics*, 1976, 7.

[10] ________, "Continuous Models of Transportation and Location Revisited," *Papers of the Regional Science Association*, 1980, 45.

[11] ________, and C. A. Ingene, "The Profit Equivalence of Mill and Uniform Pricing Policies," *Regional Science and Urban Economics*, 1976, 6.

[12] ________, C. B. McGuire, and C. B. Winsten, *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, 1956.

[13] ________, and T. Puu, *Spatial Economics : Density, Potential and Flow*, North Holland, 1985.

[14] D. S. Dendrinos, and H. Mullally, *Urban Evolution Studies in the Mathematical Ecology of Cities*, Oxford University Press, 1983.

[15] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley & Sons, 2006.

[16] A. Lösch, *The Economics of Location* ; translation from the German *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Yale University Press, 1954 (German edition 1940).

[17] T. Puu, "A Proposed Definition of Traffic Flow in Continuous Transportation Models," *Environment and Planning*, 1977, 9.

[18] ________, "Towards a Theory of Optimal Roads," *Regional Science and Urban Economics*, 1978, 8.

[19] ________, "On the Existence of Optimal Paths and Cost Surfaces in Isotropic Continuous Transportation Models," *Environment and Planning*, 1978, 10.

[20] ________, "Regional Modelling and Structural Stability," *Environment and Planning*, 1979, 11.

[21] ________, "Structural Stability and Change in Geographical Space," *Environment and Planning A*, 1981, 13.

[22] ________, "Catastrophic Structural Change in a Continuous Regional Model," *Regional Science and Urban Economics*, 1981, 11.

[23] P. Samuelson, "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming," *American Economic Review*, 1952, 42.

[24] W. B. Zhang, "Urbanizing Processes with Moving Boundaries," *Geographical Analysis*, 1988, 20.

[25] ________, "Stability Versus Instability in Urban Pattern Formation," *Occasional Papers Series on Socio–Spatial Dynamics*, 1990, 1.

[26] ________, *Synergetic Economics : Time and Change in Nonlinear Economics*, Springer Verlag, 1991.