Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 54, No. 1, 21-44, 2019

空間経済における景気循環*

中島　　巖**

〈要約〉

伝統的な景気変動論の一翼を担った乗数–加速度因子モデルを，空間的に拡張された市場を通じて区域内で交易が展開する２次元空間経済（spatial economy）の文脈において検討し直す。

交易が区域間の所得差に因るとき，所得差は空間座標に関する空間的導函数となり，さらに，所得をスカラー函数とするとき，所得の勾配（gradient）の発散（divergence）がLaplace 方程式に帰着する。同方程式に関する２重積分を法線導函数の線積分に変換するGreen 定理（Green Theorem）の援用を俟って交易の均衡条件がしたがう。

かかる均衡条件を満たす均衡点に至る時間ラグを想定し，適応型調整過程を導入すれば，空間経済に拡張された乗数–加速度因子モデルが導く解方程式が２次元波動方程式の形で表わされる。

そこでの所得の振動を振動膜（vibrating membrane）モデルのそれに比定すると，所得の時間に関する２次導函数が Laplace 方程式の定数倍で表わされる。

所得を時間函数と座標函数の積に分離するとき，前者は，２次微分方程式，後者は，両の座標を含んだ Helmholtz 方程式を導く。さらに，座標函数を座標毎の函数の積に分離するとき，それぞれの座標について，２つの微分方程式を導く。

空間経済の境界を矩型に特定化し，そこでの境界条件を上の３つの方程式に適用すれば，減衰（発散）因子と未定係数を含む二重 Fourier 級数の積の形を成す完全解がしたがう。さらに，完全解に初期条件を適用すれば，未定係数が確定される。

モデルの構造係数群を同一値に均一化し，減衰（発散）因子を特定化しても，完全解の周期は級数列に対して不規則性を示し，所得変動は，厳密には周期性をもたないことが示唆される。

JEL 区分：R11, R12, E 3
キーワード：乗数–加速度因子，Laplace 方程式，波動方程式

＊　筆者は，立教大学図書館のご好誼に負う。記して感謝いたしたい。
＊＊　専修大学名誉教授

序

動学モデルとしてのくもの巣型モデルは，部分的動学モデルに過ぎないとされた。唯一の財，市場が想定され，モデルの行動様式，決定様式は価格形成に関するものでしかなく，他の財の価格，消費者の所得，生産技術等は，悉く無視されたという意味で部分的であるとされた。

部分的動学の一般化は，２つの方向で進められた。一つは，財，市場の数，したがって変数の数を増やし，それらすべての相互関係をみる方向である。しかるに，かかる一般化は，微視的体系に関わるそれで，極めて複雑な相互関係をもつ体系を取扱わなければならなくなる。こうした複雑さという困難は，第二の方向への展開を促す。集計化の手続きを用いて変数や諸関係の数を増やすことなく集計量について動学化を図る方向である。ある基準時加重の価格指数でデフレートすることにより変数の実質化が可能となるが，単純化を求める余り，同じ価格指数が広く適用されるため相対価格の変化が無視されることにもなる。

動学モデルは，自生的投資と誘発的投資の両方を取り込んだ定式化がなされることを要請する。投資と産出量の間の関係である乗数は，消費函数のみを用いており，投資決定要因に関する配慮を欠いている。ここに，誘発的投資を産出量の変化に結びつける加速度原理が採用されて，乗数と加速度因子との相互作用が強調される余地が生れる。かかる乗数と加速度因子の結合は，他方で，高度に洗練された数学的モデルを生み出した。

ところで，財の交易が空間的に展開される空間経済においては，今度は，従来の乗数–加速度因子モデルが，部分的動学でしかなくなる。Puu［11］は，景気循環の議論を連続的な空間，時間を持つ空間経済への拡張化を試み，さらに，Puu［12］は，かかる空間経済において，乗数–加速度因子モデルの再検討を図った。さらに，Beckmann＝Puu［２］は，乗数–加速度因子モデルを２次元空間経済へ拡張し，解方程式としての波動方程式を導き，矩型，円形，球状を成す空間のそれぞれにおける景気循環のあり方を確かめた。

我々の本稿の目的は，Beckmann＝Puu, *op. cit.,* の議論の展開の過程が簡に失する点にかんがみ，矩型の場合に限定して，２次元空間経済における乗数–加速度因子モデルの解方程式の導出過程をみる。

次節では，乗数–加速度因子モデルの２次元空間経済への拡張からしたがう波動方程式としての解方程式を導く。第２節では，２次元波動方程式たる解方程式が矩型を成す空間において展開する景気循環のあり方を確かめる。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第１節　拡張化乗数–加速度モデル

1．非空間経済における乗数–加速度モデル——予備的考察

本節では，空間的に拡張された市場をもち，区域間交易が展開される空間経済への乗数–加速度

モデルの拡張化を行なう。

本項では，対比のために，非空間経済における連続的乗数–加速度モデルを展望する。[1)]

時間が空間座標と共に明示的に組み込まれていない「動学分析」(dynamic analysis) は，静学的 (static) なそれでしかなく，時間が「動学分析」において演じてきたものと同じ役割を空間 (space) が演じるとき，分析は，真の意味で，‘動学的’(dynamic) なそれとなると言うことができるかもしれない。

非空間的経済学 (spaceless economics) における「動学分析」は，動学化された多数財市場の価格調整研究とマクロ集計量における景気循環研究とに大別されよう。

何とか動学的な形が窺える分析は乗数 (multiplier) に関するものであった。しかしながら，乗数は，産出量と投資の間の関係であり，現実の経済の描写には不十分であった。乗数が唯一の事前的関係として消費函数のみを用いたことによるもので，投資面に関する事前的配慮が欠落していた。

そこで，投資決定要因を明らかに，それを乗数モデルにつけ加える試みがなされていった。一つの試みは，誘発投資を産出量の変化に結びつける加速度原理 (principle of acceleration) を含むものであった。

加速度原理は，景気循環論の文脈で古くから用いられてきた。(例えば，Clark［3］, Harrod［5］, Lundberg［9］，さらに，展望文献として，Knox［7］参照。) 乗数と加速度因子との相互作用を強調する定式化は，Hansen にしたがった Samuelson［14］,［15］を嚆矢とし，Hicks［6］等がその発展化を図った。

さて，時間ラグを含まない最も簡単な形の加速度因子の表現は，

$$I(t)=I(\dot{Y}(t)) \tag{1}$$

でなされる。$Y(t)$ は，産出量(所得)，$I(t)$ は誘発投資であり，ともに t 時点におけるフロー量とされる。ここで，(1)式を線型近似すれば，

$$I(t)=v\dot{Y}(t) \tag{2}$$

がしたがう。ただし，$v\,(>0)$ は投資係数である。ここで，誘発投資は，現行時点における産出量の一定割合となる。

連続分析において，時間ラグを導入する最も簡単な方法は，指数型ラグ，すなわち，指数形式で連続的に配分される遅れを想定することである。いま，反応率 k で反応する，あるいは，時間定数 $T=\dfrac{1}{k}$ で遅れを伴うならば，誘発投資と産出量の関係は，

$$\dot{I}(t)=-k(I(t)-v\dot{Y}) \tag{3}$$

で示される。このとき，$v\dot{Y}$ は，時間ラグのない加速度因子であり，t 時点における投資率は，潜在的にこの加速度因子によって決定される。しかるに，実際の投資率は，それより時間的に遅れ，その増加 $\dot{I}(t)$ は，不足分 $-(I(t)-v\dot{Y})$ の一定割合であり，その割合は反応の速度を示すことを(3)式は示唆している。

ここで，乗数–加速度因子モデルに時間ラグを導入する。離散型モデルである Samuelson = Hicks モデルを Phillips［10］にしたがって連続型のそれに変換する。

いま，すべての変数は，連続的に変化する時間の函数であるものとし，時間要素を省略する。

まず，需要側は，時間ラグを伴なうことはなく，集計需要量 Z は，

$$Z=A+I+C=A+I+(1-s)Y \tag{4}$$

で与えられる。ただし，A は，政府支出のごとき自生的支出であり，所得に対する貯蓄率 s の下で，消費は $C=(1-s)Y$ と表わされる。

次に，供給側は，産出量 Y が，需要 Z に対して連続的な指数型の時間ラグ，すなわち，時間定数 $T=\dfrac{1}{\lambda}$ の時間ラグを伴って反応するものとされる。

さて，需要と供給が均等する均衡状態が実現するとき，

$$Y=A+I+(1-s)Y \tag{5}$$

$$\text{or}\quad sY=A+I \tag{6}$$

がしたがう。しかるに，上の条件は，時間定数 $T=\dfrac{1}{\lambda}$ の時間ラグを伴う適応型反応（adaptive response）

$$\dot{Y}=\lambda(A+I-sY) \tag{7}$$

における均衡条件と同値となり，モデルの乗数部分を与える。

他方，加速度原理は，上で見たごとく資本ストックの変化率，すなわち投資が所得変化率に比例することを主張するものであった。すなわち，

$$\dot{K}=I=v\dot{Y} \tag{8}$$

がしたがう。ここで，再び，現実の資本ストックが最適なそれへの変化に時間ラグ反応が伴うならば

$$\dot{I}=k(v\dot{Y}-I) \tag{9}$$

がしたがう。

さて，ここで，(7)式を時間に関して微分すれば

$$\ddot{Y}=\lambda(\dot{A}+\dot{I}-s\dot{Y}) \tag{10}$$

がしたがい，(9)式と(10)式から

$$\ddot{Y}=\lambda(\dot{A}+kv\dot{Y}-kI) \tag{11}$$

$$\text{or}\quad \ddot{Y}-(\lambda s-kv)\dot{Y}+\lambda kI=\lambda\dot{A} \tag{12}$$

がしたがう。いま，(7)式を I について解けば

$$I==\frac{\dot{Y}}{\lambda}-A+sY \tag{13}$$

を得るから，これを(12)式に代入すれば

$$\ddot{Y}+(\lambda s-kv\lambda)\dot{Y}+k(\dot{Y}-\lambda A+\lambda sY)=\lambda\dot{A} \tag{14}$$

$$\text{or} \quad \ddot{Y} + (\lambda s - kv\lambda + \lambda)\dot{Y} + \lambda ksY = \lambda kA + \lambda\dot{A} \tag{15}$$

がしたがう。

ところで，政府支出のごとき外力としての自生的支出 A は，原則的には，体系に強制振動（forced vibration）を与える振動子として作用する。

しかるに，Samuelson，Hicks の原モデルでは，A は定数扱いされており，$\dot{A}=0$ がしたがい，一定の均衡 $\bar{Y}$ が特解として得られる。そこからの振動的乖離は，(15)式の右辺がゼロとなるごとき同次型の解から導出可能となる。

実は，同次型は，減衰(ないし発散)型の単振動（simple harmonic oscillation）に対応し，解は一つの一定周期をもつ正弦状波（sinusoidal wave）となる。以下での空間的拡張化は，モデルの線型性を損わないから，そこでの特解と同次型からしたがうそれとを加え合わせることによって，完全解を導くことができる。したがって，自生的支出は，以下において無視されるものとする。

2. 空間経済における乗数–加速度モデル

本項では，空間的に拡張された交易を含む空間経済における均衡解方程式を導く。

さて，2次元空間の区域間における交易の可能性を導入しよう。伝統的な国際経済学の文脈では，外国ないし海外は，空間的次元をもつ区域としては認識されない抽象概念でしかない。

いま，交易量は，消費におけると同様に，両区域の所得に依存するものとする。輸入は自区域の所得に比例し，輸出は，他区域の所得に比例するものとすると，総輸出は，両区域間の所得差に比例することになる。

ここで，簡単化のために，交易活動は，空間的に隣接した区域間のみで展開されるものとする。もし，想定される空間領域が1次元であり，その内点に注目すれば，一方にとっての所得差は，相方にとってのそれとなる。連続空間において，所得差は，空間座標に関する空間的導函数となるから，両者間の純所得差は，極限において，2次元導函数に等しくなる。いま，X を純輸出超過とし，空間座標を x とすると，$X=md^2Y/dx^2$ がしたがう。ただし，Y は所得，m は輸入性向である。

しかるに，以下では，2次元空間の場合が想定される。かかる空間においては，区域の内点から近接区域への移動可能な方向は左右前後無限に存在する。そこでの自区域と近接区域の間の純所得差を定義しよう。

所得 $Y(x_1, x_2)$ をスカラー函数とし，$Y_1=\partial Y/\partial x_1$，$Y_2=\partial Y/\partial x_2$ と設定するとき，それは連続となるものとする。

このとき，Y の x_1–x_2 座標における勾配（gradient）は，ベクトル函数

$$\mathrm{grad}\, Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \frac{\partial Y}{\partial x_2}\right) = (Y_1, Y_2) \tag{16}$$

で表わされ，発散（divergence）は，スカラー函数

$$\mathrm{div}\, Y = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} \tag{17}$$

で表わされる。しかるに，$\mathrm{grad}\, Y$ の発散は，

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,Y)=\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_2{}^2}=\nabla^2 Y \tag{18}$$

で表わされる。(18)式の最右辺の表現は，Laplace 方程式（Laplacian）と呼ばれる。

ここで，Laplace 方程式の 2 重積分を法線導函数（normal derivative）の線積分に変換するために，Green 定理（Green's Theorem）を援用しよう。[2)]

［Green 定理］

x_1-x_2平面において，平滑曲線から成る境界線 C をもつ閉かつ有界な領域を R，R を含む部分域の全域において，連続な偏導函数$\partial F_1/\partial x_2, \partial F_2/\partial x_1$をもつ連続函数を $F_1(x_1,x_2)$，$F_2(x_1,x_2)$とするとき，

$$\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2=\int_C F_1dx_1+F_2dx_2 \tag{19}$$

が成り立つ。

まず，Green 定理の援用に先立って，x_1-x_2座標における境界線 C をパラメータ表示しておこう。ここで，パラメータとして境界線の孤長（arc length）s を適用する。$a\leq s\leq b$ なるパラメータ s に対して

$$\mathbf{r}(s)=(x_1(s),x_2(s)) \tag{20}$$

が境界線 C を導く。$s=a$ における $\mathbf{r}(a)$を出発点(A)とする。パラメータ s の連続的な増加につれて，$\mathbf{r}(s)$が $x=b$ における $\mathbf{r}(b)$をもつ終点(B)に向かって辿る連続的経路は境界線 C を与える。このとき，境界線 C 上の各点において C に沿った移動が連続的に方向を変える一意の接線が存在するとき，境界線 C は平滑曲線（smooth curve）を成す。このことは，$\mathbf{r}'(s)=d\mathbf{r}/ds$ が連続で，C 上のすべての点で非ゼロ･ベクトルをもつことを意味する。また，このとき，出発点(A)と終点(B)とが一致するならば，境界線 C は，閉経路（closed path）をもつことになる。(**図-1**参照[3)]。)

ここで，スカラー函数 $Y(x_1,x_2)$が R を含む x_1-x_2座標空間の部分域において，連続な 1 次，2 次導函数をもつものとし，$F_1=-\partial Y/\partial x_2, F_2=\partial Y/\partial x_1$と設定するとき，$\partial F_1/\partial x_2, \partial F_2/\partial x_1$は R において連続となる。

このとき，Green 定理の帰結((19)式)の左辺は，

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2{}^2}=\nabla^2 Y \tag{21}$$

となり，Y の Laplace 方程式を導く。他方，右辺は，

$$\int_C(F_1dx_1+F_2dx_2)=\int_C\left(F_1\frac{dx_1}{ds}+F_2\frac{dx_2}{ds}\right)ds=\int_C\left(-\frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{dx_2}{ds}\right)ds \tag{22}$$

を導く。

しかるに，(22)式最右辺の被積分函数は，

$$(\mathrm{grad}\,Y)\cdot\mathbf{n}=\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1},\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{ds},-\frac{dx_1}{ds}\right)=\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{dx_2}{ds}-\frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{dx_1}{ds} \tag{23}$$

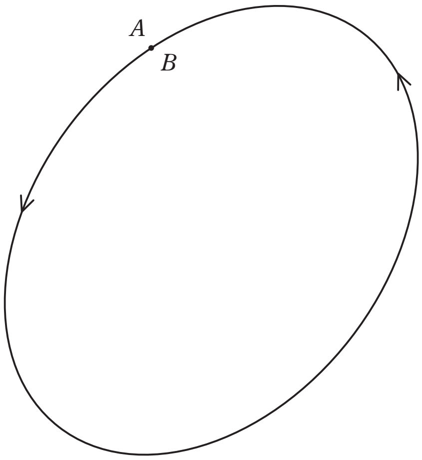

図-1

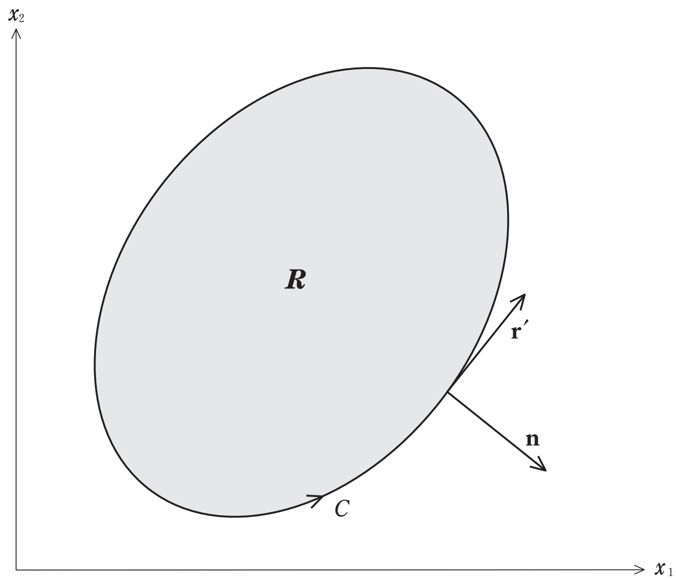

図-2

と書き改められる。ただし，$\mathbf{n}=(dx_2/ds,-dx_1/ds)$は，境界線 C に対する単位法線ベクトルである。このとき，$\mathbf{r}'(s)=(x_1(s),x_2(s))$は，境界線 C の単位接ベクトルであるから，$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}=0$ がしたがい，$\mathbf{n}$ と $\mathbf{r}'$は直交する。また，$\mathbf{r}'$ の x_1成分は正，$\mathbf{n}$ の x_2成分は負であるから，当該点において，$\mathbf{n}$ は境界線 C の外向き方向を指すことになる。(**図-2**参照[4]。)

ところで，(23)式の最左辺は，境界線 C の外向き法線の方向を指す Y の導函数であり，法線導函数（normal derivative）と呼ばれ$\partial Y/\partial n$ で表わされる。すなわち，$\partial Y/\partial n=(\mathrm{grad}\,Y)\cdot\mathbf{n}$ がしたがう。右辺は，また，$(\mathrm{grad}\,Y)_n$ と表わされる。したがって，(21)，(22)，そして(23)式から，Green 定理は，Laplace 方程式と法線導函数を結合する公式

$$\iint_R \nabla^2 Y dx_1 dx_2 = \int_C \frac{\partial Y}{\partial n} ds = \int_C (\mathrm{grad}\, Y)\cdot \mathbf{n} ds = \int_C (\mathrm{grad}\, Y)_n ds \tag{24}$$

を与えることになる。[5]

さて，(24)式を所得変化の観点から見れば，最右辺の被積分函数は，所得の勾配の境界線への法線成分であるから，境界線上の各々の点における被積分函数は，境界内部領域を境界線への法線の方向に向けるときの所得変化率となる。その線積分は，凡ゆる方向に向ける場合が考慮されるときの純所得変化率となる。結論として，Lapace 方程式は，凡ゆる方向への出発が考慮されるときのある地点から近接区域への越境するときの純所得変化率を与えることになる。したがって，地区輸出超過分は，$X = m\nabla^2 Y$ と定義される。すなわち，純輸出は，両区域間の所得差に比例する形で交易が展開される。このとき，一方からの輸出は，常に，他方にとっての輸入となり，モデルは整合する。また，交易が展開される空間が１次元のそれであれば，Laplace 方程式は，１つの空間座標軸の２次導函数へと退化していく。

しかるに，以上は交易の均衡条件を議論してきたに過ぎない。ここで，均衡状態に至る調整過程の導入が要請される。乗数–加速度因子関係に対する Phillips の想定にしたがって，新たな時間ラグを想定する適応型調整過程（adaptive process）を導入しよう。すなわち，

$$\dot{X} = \mu(m\nabla^2 Y - X) \tag{25}$$

が導入される。ただし，μ は，時間ラグ係数である。したがって，(7),(9),そして(25)式は，全体モデルを定義することになる。

ここで，Samuelson, Hicks にしたがって，時間ラグ係数 k, μ, λ は同一値をとるものとする。このとき，$k = \mu = \lambda = 1$ となるように時間の単位を定義することが可能となる。かかる簡単化の仮定は，導かれる微分方程式の次数の低次化をもたらす利点をもつ。

しかるに，経済の開放体系は，(7)式に若干の変更を要請する。すなわち，均衡状態が $A + I = sY$ から $A + I + X = sY$ へと変更されなければならない。したがって，(7)式は，対応する適応関係式

$$\dot{Y} = \lambda(A + I + X - sY) \tag{26}$$

に代置される。ここで，自生的支出 A は，無視されるものとし，(26)式を時間に関して微分し，(9)，(24)式を考慮し，$\dot{I}, \dot{X}$ を消去し，さらに，(26)式を考慮し，I, X を消去すれば，

$$\ddot{Y} + (1 + s - v)\dot{Y} + sY = m\nabla^2 Y \tag{27}$$

がしたがう。

(27)式は，２次元空間における交易の可能性を含む空間経済に一般化された拡張化乗数–加速度モデルが導く解方程式であり，２次元波動方程式（two–demensional wave equation）に相当する。

次節において，その解方程式が解かれ，循環のあり方が議論される筈である。

1） 本項の議論に関連して，Allen［１］(Chap. 3) 参照。

2） Green 定理（Green's Theorem）について，例えば，Kreyszig［８］(Sec. 10. 4 and 10. 8) 参照。

3） Kreyszig, *op. cit.*, (Chap. 10), Fig. 217(b) に準ずる。

4） Kreyszig, *op. cit.*, (Chap. 10), Fig. 238に準ずる。

5） 同式の表現は，Gauss 発散定理（Gauss's Divergence Theorem）の適用からも導出可能である。

第２節　２次元空間経済における景気循環

1．波動方程式

本節では，空間的に拡張された交易市場をもつ空間経済における景気循環の可能性をみる。

本項では，前節で導かれた空間的に拡張された波動方程式としての乗数–加速度モデル解を導くに先立って，波動方程式の性質を１次元波動方程式と２次元波動方程式の２つの場合について検討しておくことにする。[6)]

１次元波動方程式の例として，ヴァイオリン弦のごとく弾力的で１次元的に横断的振動をもたらす振動弦を，２次元波動方程式の例として，２次元空間全体に振動を及ぼす太鼓の皮のごとき振動膜を想定する。

まず，弦を１次元の x 軸上で長さ L まで引延ばし，$x=0$ と $x=L$ で固定するものとする。ここで，弦を引き上げて放すと振動が生ずる。x 軸上のある点において，時点 t における弦の振れないし偏位（deflection）を $u(x,t)$ で表わす。この偏微分方程式の解は，いくつかの簡単化の仮定の下で，１次元波動方程式で与えられる。

長さ１単位当たりの弦の質量は一定で，弦を固定する前に引き延ばした時に生ずる張力（tension）は十分強く，下方へ作用する重力の影響は無視し得るものとする。また，弦は，垂直に上下振動するものとする。かかる状況は，**図-3**に示される。[7)]

図-3において，弦の端点 P, Q における張力は，各点における弦に対する接線で表わされる。振動は，水平方向にはなく，垂直方向に限定されるから，張力の水平成分は一定となり，

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{const.} \tag{28}$$

がしたがう。このとき，垂直方向に２つの力 T_1, T_2 の垂直成分 $-T_1\sin\alpha, T_2\sin\beta$ が作用する。P における垂直成分は下方を向いており，マイナスの符号をとる。

しかるに，Newton の第２法則（Newton's second law）によれば，上の２つの力の合力は，x と $x+\varDelta x$ の間のある点で評価される弦の当該部分の質量 $\rho\varDelta x$ と加速度因子 $\partial^2 u/\partial t^2$ の積に等しい。ただし，ρ は，長さ１単位当たりの非振動時の弦の質量，$\varDelta x$ は，非振動時の弦の当該部分の長さを

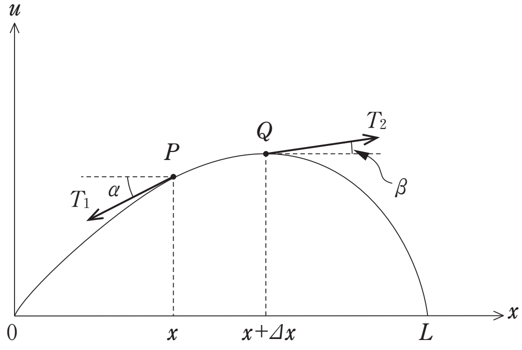

図-3(a)

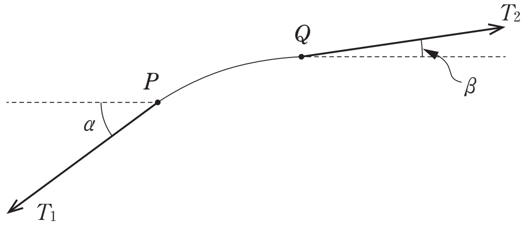

図-3(b)

表わす。すなわち，合力

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \varDelta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{29}$$

がしたがう。ここで，上の(28)式を用いて，(29)式を除すると，

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \varDelta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{30}$$

を得る。ただし，

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x} \tag{31}$$

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\varDelta x} \tag{32}$$

であり，弦の傾きを表わす。

ここで，u は時間 t に依存していることを想起し，(30)式を$\varDelta x$ で除すると，

$$\frac{1}{\varDelta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\varDelta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x} \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{33}$$

がしたがう。ここで，$\varDelta x \to 0$ とすれば，1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{where} \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{34}$$

を得る。しかるに，T/ρ は定数となり，この値が正の符号を取るべく c ではなく c^2 で表わされる。(34)式は，未知の弦の振れないし偏位に対する1次元波動方程式（one-dimensional wave equation）を構成する。このとき，2つの付加条件が要請される。

振動弦は，$x=0$ と $x=L$ で固定されているから，境界条件（boundary conditions）

$$u(0, t) = 0 \tag{35}$$

$$\text{for all } t$$

$$u(L, t) = 0 \tag{36}$$

が満たされなければならない。さらに，弦の運動のあり方は，初期時点 $t=0$ における初期偏位（initial deflection）と初期速度（initial velocity）に依存するから，初期条件（initial conditions）

$$u(x, 0) = f(x) \tag{37}$$

$$(0 \leq x \leq L)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \tag{38}$$

を満たさなければならない。ただし，$u_t = \partial u / \partial t$ である。

ここで，変数分離法（method of separating variables）を適用しよう。すなわち

$$u(x, t) = F(x) G(t) \tag{39}$$

と設定すれば，$\partial^2 u / \partial t^2 = F\ddot{G}, \partial^2 u / \partial x^2 = F''G$ がしたがうから，波動方程式((34)式)は

$$F\ddot{G}=c^2F''G \tag{40}$$

と表現し直される。両辺を c^2FG で除すると，(40)式は，

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F} \tag{41}$$

と簡単化される。しかるに，左辺は，時間 t のみに依存し，右辺は x のみに依存する。もし，x, t が共に変数であるならば，t ないし x を変化させると，他方を不変にしたまま一方だけを変化させることになり，このことは，両辺が定数であることを意味する。この定数を μ とすれば，

$$F''-\mu F=0 \tag{42}$$

$$\ddot{G}-c^2\mu G=0 \tag{43}$$

がしたがう。ここで，μ は任意の定数である。

しかるに，上の境界条件から

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0 \tag{44}$$

for all t

$$u(L,t)=F(L)G(t)=0 \tag{45}$$

が満たされなければならない。もし，$G\equiv 0$ とすれば，$u=FG\equiv 0$ が恒等的にしたがう。したがって，興味あるケースは，$G\not\equiv 0$ となり

$$F(0)=0 \tag{46}$$

$$F(L)=0 \tag{47}$$

がしたがうそれである。$\mu=0$ とすると，(42)式の一般解は，$F=ax+b$ となり，(46)，(47)式から $a=b=0$ となり，$F\equiv 0$ かつ $u=FG\equiv 0$ が，再び恒等的に成立する。興味ある解の成立のためには $\mu>0$ でなければならない。因みに $\mu=\eta^2>0$ と設定すると，(42)式の一般解は

$$F=Ae^{\eta x}+Be^{-\eta x} \tag{48}$$

となり，再び(46)，(47)式から，$F\equiv 0$ がしたがい，したがって η は負でなければならず，ここで $\mu=-p^2$ と設定すれば，(42)式は，一般解

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \tag{49}$$

をもつ。

しかるに，境界条件((46)，(47)式)から

$$F(0)=A=0 \tag{50}$$

がしたがい，また，

$$F(L)=B\sin pL=0 \tag{51}$$

がしたがう。$B\neq 0$ でなければならないとすれば，$\sin pL=0$ となり，

$$pL = i\pi \tag{52}$$

$$\text{or} \quad p = \frac{i\pi}{L} \qquad (i : \text{integer}) \tag{53}$$

を得る。ただし，i は任意の整数である。

いま，$B=1$ と設定すれば，無限個の解 $F(x)=F_i(x)$ を得る。ここで，

$$F_i(x) = \sin\frac{i\pi}{L}x \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{54}$$

であり，かかる解は，(46),(47)式を満たす。ただし，$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ であるから，負の整数は除外される。

ここで，$\mu = -p^2 = -(i\pi/L)^2$ を考慮すれば，(43)式は，

$$\ddot{G} + \lambda_i^2 G = 0, \qquad \text{where} \quad \lambda_i = cp = \frac{ci\pi}{L} \tag{55}$$

と書き改められ，一般解

$$G_i(t) = B_i \cos\lambda_i t + B_i^+ \sin\lambda_i t \tag{56}$$

がしたがう。境界条件((35),(36)式)を満たす波動方程式の解は，$u_i(x,t) = F_i(x)G_i(t) = G_i(t)F_i(x)$ であるから，

$$u_i(x,t) = (B_i\cos\lambda_i t + B_i^+ \sin\lambda_i t)\sin\frac{i\pi}{L}x \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{57}$$

で表わされる。このとき，(57)式を満たす函数は固有函数（eigenfunctions），$\lambda_i = ci\pi/L$ は固有値（eigenvalues），さらに，集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ はスペクトル（spectrum）と呼ばれる。

ところで，上の固有函数((57)式)は，波動方程式と境界条件を満たすが，個々の u_i が初期条件((37),(38)式)を満たす保証はない。しかるに，u_1, u_2 が線型かつ同次微分方程式の解であるならば，任意の定数 c_1, c_2 に対し

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 \tag{58}$$

もまた解となるから，無限個の u_i の和は，波動方程式((34)式)の解となる。

ここで，初期条件((37),(38)式)をも満たす解を得るべく，無限級数

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}(B_i\cos\lambda_i t + B_i^+\sin\lambda_i t)\sin\frac{i\pi}{L}x \tag{59}$$

を想定しよう。初期条件((37)式)を満たす級数は

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin\frac{i\pi}{L}x = f(x) \tag{60}$$

と簡単化される。このとき，$u(x,0)$ が $f(x)$ の Fourier 正弦級数（Fourier sine series）となるように個々の係数 B_i を選ばなければならない。[8] したがって，

$$B_i = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{i\pi}{L}x\,dx \qquad (i=1,2,\cdots\cdots) \tag{61}$$

がしたがう。

次に，初期条件((38)式)を満たす解を得るべく(59)式を t に関して微分し，$t=0$ で評価すれば,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{i=1}^{\infty}(-B_i\lambda_i\sin\lambda_i t + B_i^{+}\lambda_i\cos\lambda_i t)\sin\frac{i\pi}{L}x\right]_{t=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} B_i^{+}\lambda_i\sin\frac{i\pi}{L}x = g(x) \tag{62}$$

を得る。このとき，微係数 $\partial u/\partial t$ が，$t=0$ において $g(x)$ の Fourier 正弦級数になるように個々の B_i^{+} を選ばなければならず,

$$B_i^{+}\lambda_i = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{i\pi}{L}x\,dx \tag{63}$$
$$(i=1,2,\cdots\cdots)$$
$$\text{or}\quad B_i^{+} = \frac{2}{ci\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{i\pi}{L}x\,dx \tag{64}$$

がしたがう。

次に，次節で検討される 2 次元空間での交易市場をもつ空間経済における景気循環モデルを与える 2 次元波動方程式（two-dimensional wave equation）に目を転じよう。そこでは，太鼓の皮のごとき 2 次元空間全体に振動が及ぶ振動膜（vibrating membrane）が例として想定される。[9)]

再び，簡単化のためのいくつかの仮定を設ける。

まず，単位面積当たりの面の性質は一定であり，その境界沿いに固定される。このときの長さの単位 T 当たりの張力は，すべての点で，すべての方向において均一であり，面の振動の振れないし偏位 $u(x_1,x_2,t)$ は面の大きさに比して小さく，傾きもまた小さいことが仮定される。かかる状況は，**図-4**に示される。[10)]

図-4において，x_1 軸, x_2 軸に沿った，それぞれの垂直成分は

$$T\Delta x_2\sin\beta \tag{65}$$

$$-T\Delta x_2\sin\alpha \tag{66}$$

で表わされる。傾きの角度 α,β は，仮定より，小さく，したがって正接（tangent）で近似し得る。したがって，両者の垂直成分合力は,

$$T\Delta x_2(\sin\beta-\sin\alpha)\approx T\Delta x_2(\tan\beta-\tan\alpha)$$
$$= T\Delta x_2\left[u_{x_1}(x_1+\Delta x_1, x_2^{(1)}) - u_{x_1}(x_1, x_2^{(2)})\right] \tag{67}$$

で表わされる。ただし，$u_{x_1}=\partial u/\partial x_1$ であり，$x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$ は，x_2 と $x_2+\Delta x_2$ の間の値である。

同様に, 当該部分の他の両側に作用する力の垂直成分の合力は,

$$T\Delta x_1\left[u_{x_2}(x_1^{(1)}, x_2+\Delta x_2) - u_{x_2}(x_1^{(2)}, x_2)\right] \tag{68}$$

で表わされる。ただし，$u_{x_2}=\partial u/\partial x_2$ であり，$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$ は，x_1 と $x_1+\Delta x_1$ の間の値である。

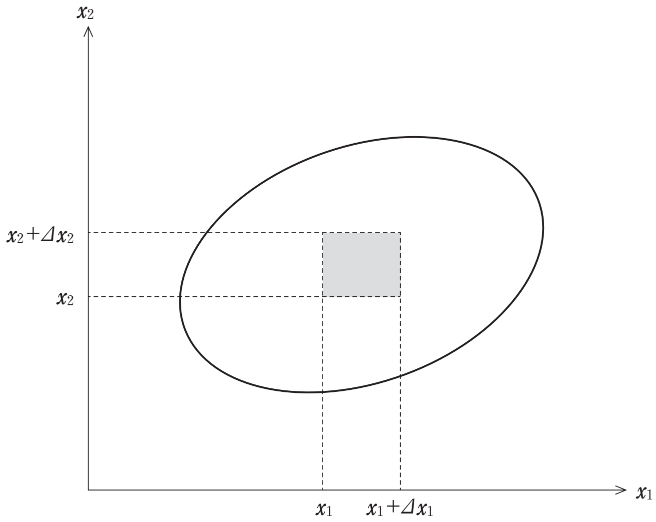

図-4(a)

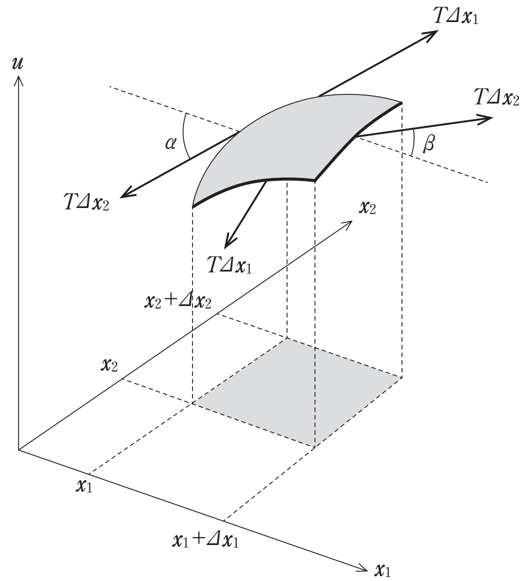

図-4(b)

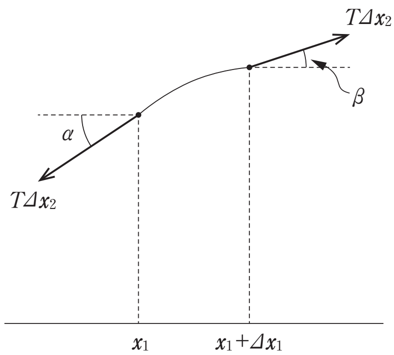

図-4(c)

再び，Newton の第 2 法則を援用すれば，(67), (68)式で与えられる合力の和は，質量 $\rho\varDelta A$ と加速度因子$\partial^2 u/\partial t^2$の積に均等化する。ここで，$\rho$ は単位面積当たりの非振動時の膜の質量，$\varDelta A=\varDelta x_1\varDelta x_2$は，非振動時の当該部分の面積を表わす。当該部分に相応するある点$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$で評価された導函数に関して

$$\rho \varDelta x_1 \varDelta x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\varDelta x_2 \left[u_{x_1}(x_1 + \varDelta x_1, x_2^{(1)}) - u_{x_1}(x_1, x_2^{(2)}) \right]$$

$$+ T\varDelta x_1 \left[u_{x_2}(x_1^{(1)}, x_2 + \varDelta x_2) - u_{x_2}(x_1^{(2)}, x_2) \right] \tag{69}$$

がしたがう。(69)式の両辺を $\rho \varDelta x_1 \varDelta x_2$ で除すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_{x_1}(x_1 + \varDelta x_1, x_2^{(1)}) - u_{x_1}(x_1, x_2^{(2)})}{\varDelta x_1} + \frac{u_{x_2}(x_1^{(1)}, x_2 + \varDelta x_2) - u_{x_2}(x_1^{(2)}, x_2)}{\varDelta x_2} \right. \tag{70}$$

がしたがう。ここで，$\varDelta x_1 \to 0, \varDelta x_2 \to 0$ とすると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = c^2 \nabla^2 u, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{71}$$

を得る。(71)式は，２次元波動方程式と呼ばれる。また，$\nabla^2 u$ は u の Laplace 方程式である。

上の２次元波動方程式の解は，上の１次元波動方程式の場合に準じて導かれるが，次項において，２次元空間における交易活動を含む空間経済の文脈の中で，２次元波動方程式として与えられた均衡条件としての解方程式に則して導かれる筈である。

2. 2次元空間経済における景気循環

本項では，矩型的２次元空間に展開される交易を含む空間経済が導く２次元波動方程式で与えられる均衡条件たる解方程式を解き，そこでの景気循環のあり方をみる。

我々が想定する交易を含む空間経済が導く均衡条件は，微分方程式

$$\ddot{Y} + (1 + s - v)\dot{Y} + sY = m\nabla^2 Y \tag{72}$$

で与えられた。(72)式は，２次元波動方程式（two-dimensional wave function）に相当する。したがって，前項で示唆された振動膜に関する議論の適用が可能となる。以下では，矩型的境界線に囲まれた矩型的振動膜（rectangular membrane）に準ずる経済空間が想定される。

ここで，(72)式を解くために，Y を空間座標 x_1-x_2 と時間座標 t とに分離する，すなわち，解 Y が

$$Y = T(t)S(x_1, x_2) \tag{73}$$

で表わされるものとする。直ちに，$\dot{Y} = T'S, \ddot{Y} = T''S$ がしたがうから，これを(72)式に代入すれば，

$$T''S + (1 + s - v)T'S + sTS = m\nabla^2 ST \tag{74}$$

を得る。両辺を mTS で除すると

$$\frac{T''}{mT} + \frac{(1 + s - v)T'}{mT} = \frac{\nabla^2 S}{S} - \frac{s}{m} \; (= -k^2) \tag{75}$$

がしたがう。しかるに，(75)式の左辺は時間座標のみに依存し，右辺は空間座標のみに依存するから，両辺は定数でなければならない。以下で示される境界条件，初期条件の下で，この定数は負の値をとらなければならず，当座この任意の定数を $-k^2$ で表わしておく。このとき，時間函数 $T(t)$，

空間函数 $S(x_1, x_2)$ に関する 2 つの微分方程式

$$T'' + (1+s-v)T' + k^2T = 0 \tag{76}$$

$$m\nabla^2 S + (k^2 - s)S = 0 \tag{77}$$

がしたがう。

まず，時間函数に関する解方程式（(76) 式）を解いておこう。

定数係数をもつ 2 次線型同次微分方程式は 2 つの 1 次独立な解 T_1, T_2 が見つかれば，一般解は，任意定数 c_1, c_2 に対して

$$T = c_1T_1 + c_2T_2 \tag{78}$$

なる形をとる。いま，$T = e^{xt}$ を試みるとき，同次方程式の補助方程式（auxiliary equation）

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{79}$$

が成立するならば，その限りにおいて，$T = e^{xt}$ は (79) 式の解となる。(79) 式の根を r_1, r_2 とすれば

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{80}$$

がしたがう。ここで，$b^2 - 4ac < 0$ とする。補助方程式が，$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ なる共役複素根をもつとき，(78) 式は，

$$T = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{81}$$

と表現し直される。(81) 式に r_1, r_2 を代入し，Euler 恒等式

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \tag{82}$$

を適用すれば，

$$\begin{aligned} T(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}\{c_1(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2(\cos\beta t + i\sin\beta t)\} \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + (c_1+c_2)i\sin\beta t] \\ &= e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) \end{aligned} \tag{83}$$

がしたがう。ただし，$A = c_1 + c_2$，$B = (c_1 + c_2)i$ は任意定数で，共に実数であるように選ばれる。

ここで，係数比較を行えば，$a = 1, b = (1+s-v)$，そして，$c = k^2$ がしたがい，さらに，(80) 式と $r_1 = \alpha + i\beta$ から

$$\alpha = -\frac{b}{2} = -\frac{1+s-v}{2} \tag{84}$$

がしたがい，さらに，

$$\beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{\sqrt{4(\alpha^2-k^2)}}{2}=(\alpha^2-k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{85}$$

がしたがう。

しかるに，(83)式は，Hicks［6］における安定条件と本質的に同一であり，$b=(1+s-v)>0$ のとき，$\alpha<0$ となり，解は減衰解（damped solution）となり，$\alpha>0$ ならば発散解（explosive solution）となることが確かめられる。

しかしながら，空間的交易の可能性を含む空間経済における安定条件は，Hicksのそれと興きを異にする。(83)式の三角函数要素に見られる単振動（simple harmonic motion）の周期 β が，モデルの構造係数からは決まってこない任意定数 k^2 を含んでいる。その値は，(77)式の空間方程式の解を満たす限りいかなる値も取り得る。もし，そこで複数個の k^2 が妥当するとき，単振動に代えて，(85)式にしたがって対応する周期 β の調和函数（harmonic function），すなわち，Laplace方程式の2次元偏導関数の解の和を取ることが必要となる。1次元領域では，基本振動の自然倍数ならすべて許容し得るが，2次元では，自然倍数も他の振動数との組合せも許容される。以下では，矩型平面領域が極めて長く，狭くなった極限において1次元領域をも含む2次元矩型領域の場合を検討する。

さて，空間函数に関する解方程式

$$m\nabla^2 S+(k^2-s)S=0 \tag{86}$$

を想起しよう。(86)式は，音響学（acoustics）においてHelmholtz方程式（Helmholtz equation）と呼ばれるそれに相当する。想定可能な2次元平面領域の例としては，矩型，円状，さらに球状のそれらを挙げることができるが，以下では，最も簡単な矩型の場合に議論を限定しよう。(**図-5**参照。)

ここで，平面領域全域において，経済的反応が同一であるという意味での一様性が仮定される。かかる仮定は，非現実的であるとのそしりを免がれない。交通・通信施設が整備されている区域では，一つの変化の衝撃は，速やかに伝達されるであろうし，また，高度に産業化した区域は，そう簡単には静止モードから変化モードに推移し得ないという意味で，経済活動の(不)活発の度合は区域毎に異なったものとなる可能性があるからである。しかしながら，かかる単純化された理念型から現実についての何か重要なことを学び得ることも事実であろう。

2次元空間座標 x_1-x_2 において，静止状態からの偏位を得るために2次元振動膜モデルが援用されるとき，偏位の規模が，時間函数と空間函数に分離され，その積で表わされるとき，2つの微分方程式((74),(75)式)が導かれた。

さて，ここで，空間函数 $S(x_1,x_2)$ を，さらに座標軸毎に分離化し，

$$S(x_1,x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2) \tag{87}$$

で表わすことにする。いま，(87)式を(86)式に代入すれば，

$$m(X_1''X_2+X_1X_2'')+(k^2-s)X_1X_2=0 \tag{88}$$

$$\text{or}\quad X_1''X_2=-(X_1X_2''+\nu^2X_1X_2) \tag{89}$$

がしたがう。ただし，$X_i''=d^2X_i/dx_i^2\ (i=1,2)$，$\nu^2=(k^2-s)/m$ である。(89)式の両辺を X_1X_2 で除す

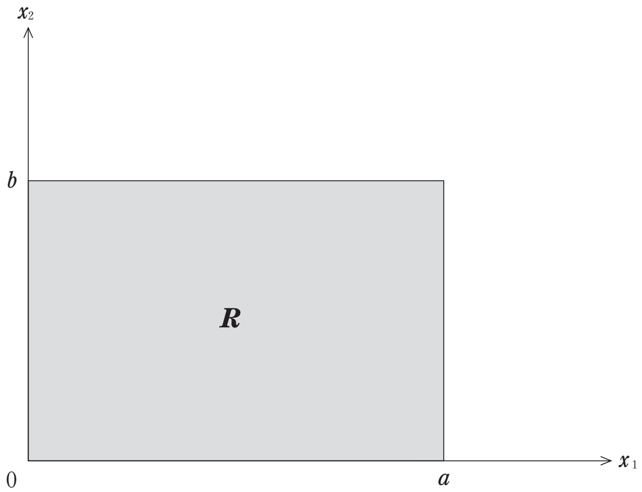

図-5

ると

$$\frac{X_1''}{X_1}=-\frac{1}{X_2}(X_2''+\nu^2X_2) \tag{90}$$

がしたがう。左辺は，x_1のみに依存し，右辺はx_2のみに依存するから，両辺は，負の定数とならなければならない。これを$-p^2$で表わせば，

$$\frac{X_1''}{X_1}=-\frac{1}{X_2}(X_2''+\nu^2X_2)=-p^2 \tag{91}$$

がしたがい，２つの微分方程式

$$X_1''+p^2X_1=0 \tag{92}$$

$$X_2''+q^2X_2=0, \qquad \text{where} \quad q^2=\nu^2-p^2 \tag{93}$$

を得る。ただし，$q^2=\nu^2-p^2$である。

さて，矩型領域の境界条件と初期条件を設定しよう。静止状態($Y=0$)から(x_1, x_2)点の偏位を$Y(x_1, x_2, t)$とする。

まず，矩型は，x_1軸上$x_1=0, x_1=a$，x_2軸上$x_2=0, x_2=b$の４つの端点によって区切られており，境界線上において$Y(x_1, x_2, t)=0$がいかなる時点においても満たされるものとする。

次に，時点$t=0$において，

$$Y(x_1, x_2, 0)=f(x_1, x_2) \tag{94}$$

$$\dot{Y}(x_1, x_2, 0)=g(x_1, x_2) \tag{95}$$

がしたがうものとする。ただし，$f(x_1, x_2)$は，領域の初期偏位，すなわち初期形状を表わし，$g(x_1, x_2)$

は，初期速度を表わし，いずれも所与であるものとする。境界線上における制約は境界条件を成し，初期時点における形状，速度の制約は初期条件を成す。

ところで，(92),(93)式の微分方程式の一般解は，それぞれ

$$X_1(x_1)=C\cos px_1+D\sin px_1 \tag{96}$$

$$X_2(x_2)=E\cos qx_2+F\sin qx_2 \tag{97}$$

で表わされる。ただし，C,D,E,F は，任意定数である。

いま，$Y(x_1,x_2,t)=T(t)S(x_1,x_2)$を想起すれば，境界条件は，$S(x_1,x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2)$が境界線上の端点 $x_1=0$，$x_1=a$，$x_2=0$，$x_2=b$ においてゼロとならなければならないことを要請する。すなわち，

$$X_1(0)=0 \quad \text{and} \quad X_1(a)=0 \tag{98}$$

$$X_2(0)=0 \quad \text{and} \quad X_2(b)=0 \tag{99}$$

が満たされなければならない。

しかるに，$X_1(0)=C=0$，したがって，$X_1(a)=D\sin pa$ がしたがう。$S(x_1,x_2)\equiv 0$ が恒等式に成立しないためには，$D\neq 0$ でなければならず，したがって，$\sin pa=0$，すなわち，整数 i に対し，p は，

$$p=\frac{i\pi}{a} \qquad (i:\text{integer}) \tag{100}$$

を満たす値に限定されなければならない。

同様の手続から，$E=0$, $F\neq 0$ がしたがい，q は，整数 j に対し

$$q=\frac{j\pi}{b} \qquad (j:\text{integer}) \tag{101}$$

を満たす値に限定される。

ここで，(100),(101)式を(92),(93)式に代入すれば

$$X_1''+\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 X_1=0 \tag{101}$$

$$X_2''+\left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 X_2=0 \tag{102}$$

がしたがう。したがって，解

$$X_i(x_1)=\sin\frac{i\pi x_1}{a} \tag{103}$$

$$X_j(x_2)=\sin\frac{j\pi x_2}{b} \tag{104}$$

を得る。前項の振動弦の場合同様，-1 以外の正の i,j に対して，対応する解は，本質に同一となるから，$i,j=-1,-2,\cdots$を考慮する必要はなく，

$$S_{ij}(x_1, x_2) = X_i(x_1)X_j(x_2) = \sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots \tag{105}$$

がしたがう。(105)式は，境界線上でゼロとなる 2 次元 Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 S}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial {x_2}^2} + p^2 S = 0 \tag{106}$$

の解に相当する。

さて，$q^2 = \nu^2 - p^2$ ((93)式)，$\nu^2 = (k^2 - s)/m$ ((89)式)を想起すれば

$$\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 = \frac{k^2 - s}{m} \tag{107}$$

がしたがい，さらに

$$\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right) = \frac{k^2 - s}{m} \tag{108}$$

と書き改め，$\beta = (k^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ ((85)式)を適用すれば，(108)式は

$$\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{m} - \frac{s}{m} \tag{109}$$

と変形される。

(109)式に対応する(83)式の一般解は

$$T_{ij}(t) = e^{\alpha t}(A_{ij}\cos\beta_{ij}t + B_{ij}\sin\beta_{ij}t) \tag{110}$$

となるから，$Y_{ij}(x_1, x_2, t) = T_{ij}(t)S_{ij}(x_1, x_2)$ の解は，

$$Y_{ij}(x_1, x_2, t) = e^{dt}(A_{ij}\cos\beta_{ij}t + B_{ij}\sin\beta_{ij}t)\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b} \tag{111}$$

で与えられる。(111)式の函数は固有函数，β_{ij} は固有値に相当する。

しかるに，(111)式の解は，境界条件のみを満たす解でしかない。初期条件が未だ考慮されていない。初期条件をも満たす解を得るためには，二重 Fourier 級数（double Fourier series）の適用が示唆される。Fourier 級数は，三角函数を基底としたベクトル(函数)を成分で表わしたものである。

いま，二重級数（double series）

$$Y(x_1, x_2, t) = e^{\alpha t}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{ij}\cos\beta_{ij}t + B_{ij}\sin\beta_{ij}t)\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b} \tag{112}$$

を想定し，初期条件((94)式)を適用し，$t = 0$ と設定すれば，(112)式は，

$$Y(x_1, x_2, 0) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b} = f(x_1, x_2) \tag{113}$$

と書き改められる。(113)式は，$f(x_1, x_2)$ の二重 Fourie 級数と呼ばれる。ここで，係数を決定する

ために

$$K_i(x_2)=\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin\frac{j\pi x_2}{b} \tag{114}$$

と設定すれば，(113)式は，

$$f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(x_2)\sin\frac{i\pi x_1}{a} \tag{115}$$

と表現される。(115)式は，固定されたx_2の値に対し，x_1の函数とみなされる$f(x_1,x_2)$の Fourier 正弦級数（Fourier sine series）となる。このとき，Fourier 展開の係数は，

$$K_i(x_2)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x_1,x_2)\sin\frac{i\pi x_1}{a}dx_1 \tag{116}$$

で与えられる。さらに，(114)式は，$K_i(x_2)$の Fourier 正弦級数となり，係数は，

$$A_{ij}=\frac{2}{b}\int_0^b K_i(x_2)\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_2 \tag{117}$$

で与えられる。(116), (117)式から

$$A_{ij}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x_1,x_2)\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_1dx_2,\qquad i,j=1,2,\cdots \tag{118}$$

がしたがう。(118)式は，二重 Fourier 級数((113)式)における$f(x_1,x_2)$の Fourier 係数を与える公式となり，一般化 Fourier 公式（generalized Fourier formula）と呼ばれる。

次に，二重級数((112)式)の係数B_{ij}を決定するために，初期条件((95)式)を適用し，(112)式を項別に微分し，$t=0$で評価すれば

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{ij}\beta_{ij}\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_1dx_2=g(x_1,x_2) \tag{119}$$

がしたがう。ここで，$g(x_1,x_2)$が二重 Fourier 級数に展開可能であるものとすると，上と同様の議論から，

$$B_{ij}=\frac{4}{ab\beta_{ij}}\int_0^b\int_0^a g(x_1,x_2)\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_1dx_2,\qquad i,j=1,2,\cdots \tag{120}$$

がしたがう。

ここで，$f(x_1,x_2)=Y_0$, $g(x_1,x_2)=Y_0'$と表記し直せば，Fourier 係数は，それぞれ

$$A_{ij}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a Y_0\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_1dx_2 \tag{121}$$

$$B_{ij}=\frac{4}{ab\beta_{ij}}\int_0^b\int_0^a Y_0'\sin\frac{i\pi x_1}{a}\sin\frac{j\pi x_2}{b}dx_1dx_2 \tag{122}$$

で表わされる。Y_0は，$t=0$における所得水準であり，Y_0'は，$t=0$における所得の変化率である。

もし，体系が初期に静止モードにあれば，B_{ij}は消滅することになる。

ところで，上の(112)式で与えられた二重級数は，所得$Y(x_1, x_2, t)$の完全解（complete solution）に他ならない。

いま，(84)式

$$\alpha = -(1+s-v)/2 \tag{84}$$

を想起し，構造係数を$s=m=v=\dfrac{1}{4}$と設定すれば，$\alpha=-\dfrac{1}{2}$がしたがい，このとき，αは減衰因子（damping factor）として作用する。

次に，(109)式

$$\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{m}-\frac{s}{m} \tag{109}$$

を想起し，領域が正方形を成す，すなわち，$a=b=\pi$が満たされるものとすると，(109)式は

$$\beta=(i^2+j^2)^{\frac{1}{2}}/2 \tag{123}$$

を導く。いま，$i, j=(1,1)$とすれば$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$i, j=(1,2)$ or $(2,1)$とすれば，$\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$i, j=(2,2)$とすれば，$\beta=\dfrac{\sqrt{8}}{2}$，$i, j=(1,3)$ or $(3,1)$とすれば，$\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$がしたがう。かかる短期間内の列に対してすら，$\beta$は，単純な分数とならない。[12] このことは，ある特定区域において，所得の変動は，もはや厳密には周期的なそれとはならないことを示唆している。

6）本項の議論について，Kreyszig, *op. cit.*,(Chap. 12), Courant＝Hilbert［4］参照。
7）Kreyszig, *op. cit.*,(Chap. 12), Fig. 283に準ずる。
8）Fourier 正弦級数について，Kreyszig, *op. cit.*,(Chap. 11. 3）参照。
9）振動膜（vibrating membrane）について，Kreyszig, *op. cit.*,(Chap. 12. 7）参照。
10）Kreyszig, *op. cit.*,(Chap. 12), Fig. 298に準ずる。
11）本項の議論に関して，Beckmann＝Puu［2］(Chap. 8), Puu［11］,［12］,［13］, Zhang［16］(Chap. 8）参照。
12）上の数値例は，Beckmann＝Puu, *op. cit.*,(p. 240）に負う。

結びにかえて

物体は，物質として2つの質量をもつ。物体は，外力を受けなければ静止状態を維持し，一瞬の外力に対しては等速の直線動を維持する。かかる性質が慣性（inertia）である。さらに，静止状態から物体を動かすためには，力を加える必要がある。すなわち，物体はかかる力に抵抗する性質をもつ。この性質が慣性質量（inertial mass）である。しかしながら，外力を加え続けると運動速度に変化が生ずる。これが加速であり，単位時間当たりの変化率が，加速度（acceleration）に他ならない。

しかるに，あらゆる物体は互いに引き合う引力ないし重力をもち，その規模を決定するのが，もう１つの質量である重力質量（gravitational mass）である。引力の作用を表わす函数としてポテンシャル（potential）なる量の導入が図られ，やがて重力場の概念に発展した。ポテンシャルは，重力をもつ物体が他の位置にある物体に及ぼす力を予め位置の函数として指定される量である。ポテンシャル f を物体間の距離 r，座標 x_1, x_2, x_3 の函数で表わせば，定数 c の下で，$f(x_1, x_2, x_3) = c/r$ がしたがい，引力 p は，$p = \mathrm{grad} f = \mathrm{grad}(c/r)$，すなわち，ポテンシャル f の勾配で表わされる。このとき，ポテンシャル f は Laplace 方程式 $\nabla^2 f = 0$ の解で与えられる。

しかるに，景気循環論としての乗数–加速度原理は，慣性が支配する慣性系と加速度が支配する加速度系が成す体系における慣性質量のみに関わる問題として展開されてきたに過ぎないと言うこともできるかもしれない。したがって，上での試みは，重力場に擬せられる２次元ベクトル場を含む空間経済への景気循環論としての乗数–加速度原理の拡張化の意味をもつことになる。

まず，交易が展開する市場が２次元ベクトル場で表わされるとき，交易を生む区域間の所得(差)が所得の発散で表わされ，さらに，Laplace 方程式で表わされ，Green 定理の適用により Laplace 方程式と法線導函数を結合する均衡条件が導かれた。

次に，導かれた均衡条件を満たす均衡状態に至るに際して時間ラグを想定し，適応型調整過程を導入することによって，乗数–加速度因子モデルの解方程式が２次元波動方程式の形をとることが確かめられた。

最後に，交易が展開する領域が矩型を成すところで，適当な境界条件，初期条件の下で，二重 Fourier 級数の適用により解方程式の完全解が導かれた。解は，正弦函数の積の形をとる複合振動の形をとるが，もはや厳密には周期性は妥当しないことが帰結された。

本稿の議論の円形，球状領域への適用化は，我々の議論の興味深い発展化の一方向となるかもしれない。

References

[1] R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, Macmillan, 1956.

[2] M. Beckmann and T. Puu, *Spatial Economics : Density, Potential, and Flow*, North Holland, 1985.

[3] J. M. Clark, "Business Acceleration and the Law of Demand," *Journal of Political Economy*, 25, 1917.

[4] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, 1953.

[5] R. F. Harrod, *The Trade Cycle*, Oxford University Press, 1936.

[6] J. R. Hicks, *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford University Press, 1950.

[7] A. D. Knox, "The Acceleration Principle and the Theory of Investment : A Survey," *Economica*, 19, 1952.

[8] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley and Sons, 2006.

[9] E. Lundberg, *Studies in the Theory of Economic Expansion*, King, 1937.

[10] A. W. Phillips, "Stabilization Policy in a Closed Economy," *Economic Journal*, 64, 1954.

[11] T. Puu, "Outline of a Trade Cycle Model in Continuous Space and Time," *Geographical Analysis*, 14, 1982.

[12] ________, "Multiplier–Accelerator Model Revisited," *Regional Science and Urban Economics*, 16, 1986.

[13] ________, "Complex Dynamics in Continuous Models of the Business Cycle," in D. Batten, J. Casti and B. Johansson, (eds.) *Economic Evolution and Structural Adjustment*, Springer Verlag, 1987.

[14] P. A. Samuelson, "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration," *Review of*

Economic Statistics, 21, 1939.
［15］ ________, “A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier,” *Journal of Political Economy*, 47, 1939.
［16］ W–B. Zhang, *Synergetic Economics : Time and Change in Nonlinear Economics*, Springer Verlag, 1991.