

通貨バブルと確率過程*

中島 巖

序

投機的スパイク攻撃 (speculative spike) がその要因の1つであると広く信じられた1984-85年のドルの大高騰に際して、基軸通貨国アメリカの政府は、市場決定に任せ切る立場をとらず、国際的協調介入に恃むドル管理政策への実質的転換に訴える立場をとった。1985年の Plaza 合意 (Plaza Agreement), 1987年の Louvre 合意 (Louvre Accord) は、かかる協調介入の具体例である。そこには、為替レートが国際収支を通じて実体経済に影響を及ぼす、したがって通貨バブルが基礎的経済諸条件、すなわちファンダメンタルに影響を及ぼし兼ねないとする判断が働いていたと言えるかもしれない。

為替レート決定の動学分析の先駆となった Krugman [10] は、上の政策的コミットメントを念頭に置き、為替レートの決定をその変動域 (exchange rate bands) におけるそれに限定している。そこでの Krugman の分析は、貨幣流通速度が Brown 運動過程 (Brown motion process) にしたがるとうとする仮定の下で、ファンダメンタルの函数としての為替レートの陽表解を引き出した。そこでは、変動域防衛のための政策介入へのコミットメントの存在が介入発動以前においてすら為替レートの安定化に寄与することが示された。

しかるに、Froot = Obstfeld [14] は、為替レートの貨幣理論モデルを適用すれば、Krugman の仮定を内生的に導出し得ることを示した。さらに、Dornbusch [6] は、為替レートの決定の不可欠要因として価格伸縮性、購買力平価に依存し過ぎるとして貨幣モデルを退けた。

他方、資産価格が先読みの (forward-looking) な期待によって決定されるモデルにおいて、合理的バブル (rational bubble) が生じ得る、すなわち、Markov 性 (Markov property) をもつ自己充足的期待 (self-filling expectations) の下で、資産価格がファンダメンタルから大幅に乖離するとす

*) 筆者は、文献 [15] の検索に関して専修大学図書館の好誼に負っている。記して深く感謝いたしたい。

る予想が実現されることになる。Blanchard〔3〕は、瞬時に崩壊し、その後ファンダメンタル値に戻るタイプのバブルを提示した。それは、崩壊が Poisson 過程 (Poisson process) にしたがって、確率 1 で確実にいずれ終結し、以後、不都合の展開の可能性が残ることがないタイプのそれで、Blanchard バブル (Blanchard bubbles) と呼ばれる。

ところで、Tirole〔19〕は、実質配当を産む資産が想定される時、無限時間視野をもつ主体の割引期待効用の最大化の形の最適化行動の仮定と価格バブルの出現とが整合しない可能性を示した。それは、バブルと合理性との整合性の度合を質す問い掛けでもあった。しかるに、Tirole〔20〕は、無限時間視野をもつ主体の代りに世代重複を認める枠組の中で、バブルの可能性が残り得ることを示した。それは、理論的処理上の都合で、バブルの可能性を予め排除することの非妥当性に注意を促す試みでもあった。

資産価格をめぐってバブルの可能性を取り込む形のモデル化が展開されていく中で、資産価格からファンダメンタルへのフィードバック経路の存在性は仮定から排除され続けた。しかるに、Blanchard = Watson〔4〕は、バブルがファンダメンタルの推移に影響を与える場合が少なくないとして住宅市場、株式市場を例に挙げた。Miller = Weller〔11〕,〔12〕,〔13〕は、もう 1 つの例として外国為替市場を取り上げ、貨幣理論に拠らず確率化された Dornbusch モデルの援用の中で、それぞれ、通貨バブルが為替レートと物価水準にもたらすフィードバック効果、次いで、通貨変動域内におけるフィードバック効果を物価伸縮性が支配する場合、そして物価非伸縮性が支配する場合について検討した。後者の 2 つの場合は、上の協調介入への政策コミットメントの効果について示唆を与える試みであるとみなすこともできる。

本稿における我々の目的は、Miller = Weller〔11〕の示唆にしたがって、確率化された Dornbusch 型モデルに拠りながら通貨バブルの発生可能性の存在が為替レート、そしてファンダメンタルとしての物価水準にもたらすフィードバック効果をみることにある。まず、次節では、合理的期待仮説の下での完全予見期待均衡 (perfect foresight expectations equilibrium) の動学的特性を確かめた後に、Blanchard 型の確率的バブル (stochastic bubbles) の発生可能性の存在が上の均衡体系の為替レートと物価水準にもたらす効果をみる。

第 2 節では、ファンダメンタルが Brown 運動過程 (Brown motion process) にしたがうところで、確率的バブルの発生可能性の存在が均衡体系の為替レート、物価水準にもたらす効果を確かめた後に、ファンダメンタルが平均回帰過程 (mean reverting process) にしたがうところでの上の効果の合流型超幾何函数 (confluent hypergeometric function) のタームによる数値表示を導く。最後に、若干の結論的言及がなされる筈である。

なお、本稿は最終稿ではない。

第 1 節 完全予見期待と通貨バブル

1. 完全予見期待均衡——予備的考察

本節では、完全予見期待が支配する開放経済における物価水準、為替レートのあり方と、そこで

の通貨バブルの発生可能性をみる。

本項では、完全予見開放経済における物価水準、為替レートのあり方を Dornbusch 型の開放経済モデルに抛りながら検討しておくことにする¹⁾。

さて、外国為替市場に関して、通貨バブルの発生可能性があり、それが基礎的経済諸条件（以下で、単にファンダメンタル (fundamentals) と呼ぶ。）に影響を及ぼす余地がある市場が想定される。Dornbusch [6] は、為替レートが国際収支を通じて経済活動水準に影響をもたらすならば、ファンダメンタルにも影響をもたらす可能性があることを示唆した。

資本の完全移動性を保証する完全資本市場の仮定の下で自国利子率と対外利子率が均等化するという想定は、経済主体が為替レートの変化を全く念頭に置かないところで妥当するにすぎない。すなわち、固定為替相場制 (fixed exchange rate regime) の下で妥当し得ても変動為替相場制 (regime of freely flexible exchange rate) の下では妥当し得ない。変動する為替レートに直面する経済主体は、変動のあり方に関して何らかの期待形成を行わざるを得ない。Dornbusch, *op. cit.*, は、合理的期待に対する確定的な対極として完全予見期待 (perfect foresight expectations) の仮定を資本の完全移動性、物価の硬直性に直面する小国開放経済モデルに導入した。

Dornbusch モデルは、Cagan タイプの通貨モデルといくつかの構成要素を共有している²⁾。すなわち、一定の外生的世界利子率に直面する小国が想定され、開放資本市場と完全予見期待が妥当するところでアンカパーの金利平価 (uncovered interest parity) の条件、すなわち、外貨建て資産の自国通貨建て期待収益率と自国通貨建て資産の収益額が同一になる関係が満たされなければならないごとくである。

さて、以下で想定される Dornbusch 型モデルを特定化しておこう。すなわち、

$$y = -\nu i - \eta(e + p - p^*) + \xi g \quad (1)$$

$$m - p = ky - \lambda i \quad (2)$$

$$Dp = \phi(y - \bar{y}) \quad (3)$$

$$i = i^* + De^e \quad (4)$$

$$De^e = De \quad (5)$$

で表わされる。ただし、 D は微分演算子で $Dx = dx/dt$ を表わし、上つき添字 e は完全予見期待を表わし、また、*印は、対外変数を表わす。さらに、すべての変数は対数値で与えられる。 y は、GNP の対数、 i は瞬時的国内名目利子率の対数、 e は外貨建て為替レートの対数、 p は国内最終生産物価格の対数、 g は財政政策指標の対数、 m は国内貨幣残高の対数であり、 \bar{y} は GNP の長期均衡水準の対数である³⁾。 $\nu, \eta, \xi, k, \lambda, \phi$ は該当変数に対するそれぞれの反応度を与える反応係数で定数である。

(1) 式は、小国開放経済にとっての IS 曲線である。左辺の供給に対して右辺の需要は利子率に対し負の反応、財政政策に対し正の反応を示す。さらに、ここで外貨建て為替レートを ε で表わせば、 $e + p - p^* \equiv \log(\varepsilon p / p^*)$ は外貨建ての実質為替レートを表わし、需要がそれに負の反応を示すことが想定される。他方、(2) 式は、小国開放経済にとっての LM 曲線を与え、左辺の実質残高に対し、右辺は、それぞれ取引動機、投機的動機による貨幣需要を表わす。

さらに、(3)式は、Phillips 曲線を与える。このとき、最終生産物の産出額 y と完全雇用産出量 \bar{y} との差、すなわち Okun ギャップ (Okun gap) が正(負)のとき、価格はそのギャップを埋めるべく漸進的調整速度 ϕ にしたがって上昇(低下)する。(4)式は、アンカバーの金利平価の条件である。そして、(5)式は、経済主体の為替レート(の経路)に関する期待が現実のそれに一致する完全予見期待を表わす。

いま、本稿の目的の観点から財政政策を捨象し、(4)、(5)式を結合すれば、(1)–(5)式の体系は、完全予見期待をもつ確定的 Dornbusch 型モデルに書き改められる。すなわち、

$$m - p = ky - \lambda i \quad (6)$$

$$y = -\nu i - \eta(e + p - p^*) \quad (7)$$

$$Dp = \phi(y - \bar{y}) \quad (8)$$

$$De = i^* - i \quad (9)$$

がしたがう。(9)式は、裁定式 (arbitrage equation) を与える。

ここで、(6)、(7)式を結合し i を消去すれば

$$y = \frac{1}{\lambda + \nu k} [\nu(m - p) - \lambda\eta(e + p - p^*)] \quad (10)$$

がしたがう。(10)式を(8)式に代入すれば

$$Dp = \phi \left[\frac{1}{\lambda + \nu k} (\nu(m - p) - \lambda\eta(e + p - p^*)) - \bar{y} \right] \quad (11)$$

を得る。同様に(6)、(7)式から y を消去すれば

$$i = \frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta)p - k\eta e - m + k\eta p^*] \quad (12)$$

がしたがう。(12)式を(9)式に代入すれば

$$De = i^* - \frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta)p - k\eta e - m + k\eta p^*] \quad (13)$$

がしたがう。

以上から、(6)–(9)式の体系は、(11)、(13)式のそれに集約される。ここで、(11)、(13)式を $Dp = De = 0$ を満たす定常状態 (\bar{p}, \bar{e}) の周りに線型近似すれば

$$Dp = -\frac{1}{\lambda + \nu k} [\phi(\nu + \lambda\eta)(p - \bar{p}) + \phi\lambda\eta(e - \bar{e})] \quad (14)$$

$$De = -\frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta)(p - \bar{p}) - k\eta(e - \bar{e})] \quad (15)$$

がしたがう。上の近似体系の係数は定数のそれとなる。ここで、(14)、(15)式を行列表示すれば

$$\begin{bmatrix} Dp \\ De \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & -\phi\lambda\eta \\ k\eta - 1 & k\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - \bar{p} \\ e - \bar{e} \end{bmatrix} \quad (16)$$

がしたがう。ただし $\Delta = \lambda + \nu k$ である。

さて、上の線型化された体系の安定性をみるために、(16)式の右辺の $1/\Delta$ が乗じられた係数要素から成る Jacobian 行列を J とする。行列 J について

$$\text{tr}(J) = \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{\Delta} [-\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta] \quad (17)$$

$$\det(J) = \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{\Delta} [-\phi(\nu + \lambda\eta)k\eta + \phi\lambda\eta(k\eta - 1)] \quad (18)$$

がしたがう。ここで、 $k\eta < 1$ を仮定すれば、(18)式から行列 J の行列式 $\det(J) < 0$ がしたがう⁴⁾。ただし、 ρ_1, ρ_2 は行列 J の特性方程式

$$|\rho I - J| = 0 \quad (19)$$

を解く特性根であり ρ_1, ρ_2 が反対符号をもつ。このことは、体系が鞍点安定的 (saddle-point stable) なそれとなり、定常状態 (\bar{p}, \bar{e}) に収束する安定多様体 (stable manifold) が存在することを意味している。

いま、 $\rho_1 > 0 > \rho_2$ と設定すれば、 ρ_1 は安定根 (stable root)、 ρ_2 は不安定根 (unstable root) となる。いま、特性根 ρ について固有ベクトル (eigen vector) を求める。ここで、 p, e をそれぞれの定常状態 \bar{p}, \bar{e} からの乖離幅で測るものとしよう。直ちに、

$$[\rho I - J] \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

は、

$$\begin{bmatrix} \rho + \frac{1}{\Delta}\phi(\nu + \lambda\eta) & \frac{1}{\Delta}\phi\lambda\eta \\ \frac{1}{\Delta}(1 - k\eta) & \rho - \frac{1}{\Delta}k\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

と表わされ、列ベクトル $(p, e)'$ は固有ベクトルを与える。しかるに、行列の第1行から

$$\left(\rho + \frac{1}{\Delta}\phi(\nu + \lambda\eta)\right)p + \frac{1}{\Delta}\phi\lambda\eta e = 0 \quad (22)$$

がしたがいい、したがって

$$\frac{e}{p} = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \Delta\rho}{\phi\lambda\eta} \equiv \theta \quad (23)$$

$$\text{or } e = \theta p \quad (24)$$

を導く。しかるに、(23)式を満たす特性根 ρ は負の符号をとる、すなわち不安定根 ρ_2 でなければならない。このとき、 ρ_2 に対応する不安定固有ベクトルの傾きを θ_2 とすれば

$$\theta_2 = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \Delta\rho_2}{\phi\lambda\eta} (<0) \quad (25)$$

は負の符号をとることになる。(図-1において、不安定固有ベクトルは実線 UU で示される。)

(21)式は、また、

$$\frac{1}{\Delta}(1 - k\eta) - \left(\rho - \frac{1}{\Delta}k\eta\right)\theta = 0 \quad (26)$$

$$\text{or } \theta = \frac{1 - k\eta}{k\eta - \rho\Delta} \quad (27)$$

を導く。しかるに、 $k\eta < 1$ の仮定の下で、(26)式は $\rho\theta > 0$ が満たされなければならないことを意味しており、固有ベクトルが正の傾きをもつ安定ベクトルであるものと仮定すれば、特性根 ρ は正の符号をとる安定根 ρ_1 でなければならない。このとき、

$$\theta_1 = \frac{1 - k\eta}{k\eta - \rho_1\Delta} (>0) \quad (28)$$

がしたがう。(図-1において、安定固有ベクトルは、実線 SS で示される。)

最後に、(16)式から、 $Dp=0$ は直線

$$-\phi(\nu + \lambda\eta)p - \phi\lambda\eta e = 0 \quad (29)$$

を導く。(29)式を満たす直線の傾きを $\theta_p = e/p$ とすれば

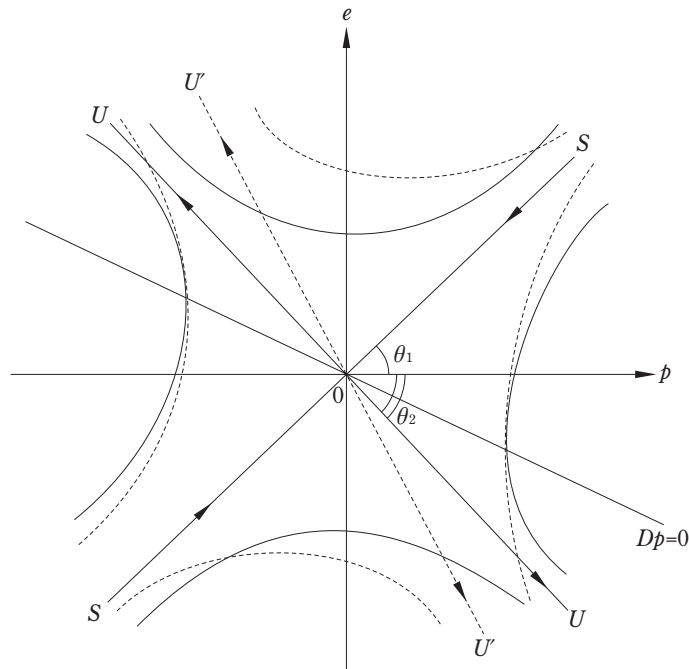


図-1

$$0 > \theta_p = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta)}{\phi\lambda\eta} > -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \Delta\rho_2}{\phi\lambda\eta} = \theta_2 \quad (30)$$

がしたがう、 $Dp=0$ を満たす直線は、不安定固有ベクトルよりも緩やかな負の傾きをもつことが帰結される。(図-1において、実線 $Dp=0$ で示される。)

2. 確率的バブルと完全予見期待均衡

本項では、完全予見期待をもつ確率化 Dornbusch 型モデルに確率的バブル発生可能性が導入されるところでの物価水準、為替レートのあり方をみる⁵⁾。

Blanchard [3] は、自己終結型投機的バブル、すなわち市場暴落で終わる投機的バブルが合理的期待の仮定と整合し得る可能性を示唆した。さらに、投機的バブルが取り得る形態は限りなく存在し得るとして、金市場 (gold market) をその一例として取り上げ、確率的バブル (stochastic bubbles) 発生の可能性を導入した。しかるに、確定的 Dornbusch 型モデルに Blanchard が提起する確率的バブルの可能性を導入することは、前項の (9) 式で与えられる裁定式に修正が施されなければならないことを意味する。

いま、離散的確率過程を想定し、時点 t において、過程は不安定バブル多様体上にあるか、さもなくば安定多様体上にあるものとする。いま、過程がバブル多様体上にあるならば、次の時点 $t+1$ において崩壊確率 (death probability) π でバブルが弾け安定多様体上に回帰するか、あるいは $1-\pi$ の確率でバブル多様体上に乗り続けるものとする。逆に、過程が安定多様体上にあるならば、時点 $t+1$ において、確率 1 で安定多様体上に乗り続け、したがってバブル多様体に乗る確率はゼロとなるものとする。(図-2参照。ただし、 \bar{x} は安定多様体を表わす。)

上の離散的確率過程において、時点 t にバブル多様体から出発する過程の時点 $t+1$ におけるそれとの期待差分 (expected difference) は、

$$\Delta = \pi\bar{x} + (1-\pi)x_{t+1} - x_t \quad (31)$$

で与えられ、さらに、(31)式は

$$\Delta = x_{t+1} - x_t + \pi(\bar{x} - x_{t+1}) \quad (32)$$

と変形され、期待キャピタル・ゲイン (expected capital gain) とみなされる。

ところで、上の離散的確率過程に対応する連続的確率過程を想定すれば、期待差分に対応する期待微分 (expected differential)

$$\Omega = Dx + \pi(\bar{x} - x) \quad (33)$$

がしたがう。

ここで、上の Blanchard, *op. cit.*, の示唆による確率的バブルの可能性を確定的 Dornbusch 型モデルに導入しよう。

いま、最終生産物の価格が硬直的 (sticky) であるものとする。かかる硬直的な変数が存在するところでバブル崩壊時の資産価格としての為替レートの動向を特定化する最良策は、価格がバブル

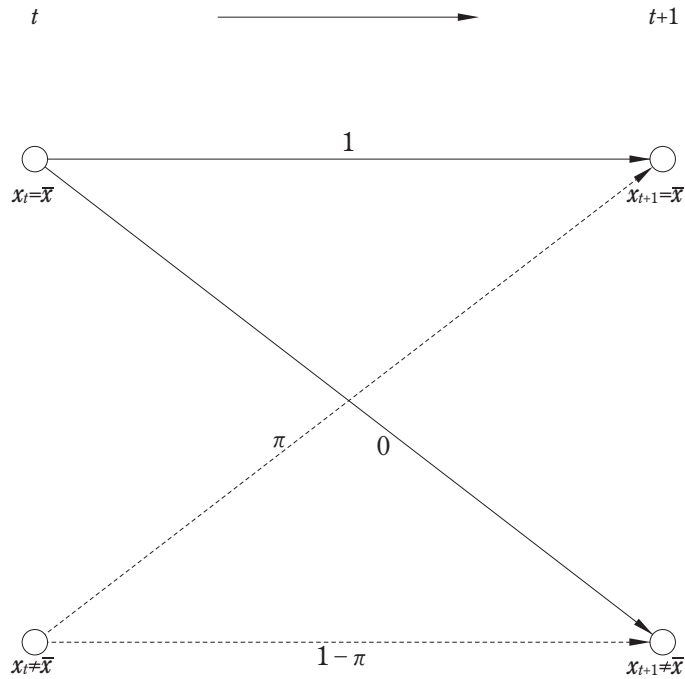


図-2

崩壊とともに安定多様体上に乗る、それ以後それに沿って安定長期均衡たる定常状態に向かって円滑に調整されていく過程を仮定することである⁶⁾。かかるファンダメンタルの内生的調整は、上の裁定式((9)式)の修正を要請する。すなわち、バブル崩壊確率 π の下で、危険中立性が仮定される時、裁定式は

$$De + \pi(\theta_1 p - e) = i^* - i \quad (34)$$

と修正される。このとき、 $\pi(\theta_1 p - e)$ は、バブル崩壊に対処すべく購入する保険の保険料とみなすことができ、したがって、(34)式は、保険購入費用を償うべく利子差額が拡大化されなければならないことを示唆している。

以上から、確率的バブルの可能性を含む新体系

$$m - \dot{p} = ky - \lambda i \quad (35)$$

$$y = -\nu i - \eta(e + p - \bar{p}^*) \quad (36)$$

$$Dp = \phi(y - \bar{y}) \quad (37)$$

$$De + \pi(\theta_1 p - e) = i^* - i \quad (38)$$

を得る。

さて、新体系を $Dp = De = 0$ を満たす定常状態 (\bar{p}, \bar{e}) の周りに線型近似しよう。しかるに、Phillips

曲線((37)式)はバブルの可能性の導入にも影響されないことに注意すれば、 Dp に関して前項の(11)、(14)式がそのまま適用し得る。 De については、(35)、(36)式を結合し i について解き(38)式に代入すれば

$$De = i^* - \frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta)p - k\eta e - m + k\eta p^* + (\lambda + \nu k)\pi(\theta_1 p - e)] \quad (39)$$

を得る。(39)式を定常状態 \bar{e} の周りに線型近似すれば

$$De = -\frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta - (\lambda + \nu k)\pi\theta_1)(p - \bar{p}) - (k\eta + (\lambda + \nu k)\pi)(e - \bar{e})] \quad (40)$$

を得る。したがって、新たな線型近似体系の行列表示

$$\begin{bmatrix} Dp \\ De \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & -\phi\lambda\eta \\ k\eta - 1 - \pi\theta_1\Delta & k\eta + \pi\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - \bar{p} \\ e - \bar{e} \end{bmatrix} \quad (41)$$

を得る。ただし、 $\Delta = \lambda + \nu k$ である。

(41)式の右辺の $1/\Delta$ を乗じられた係数要素から成る Jacobian 行列を J' とすれば、特性方程式

$$|\rho' I - J'| = 0 \quad (42)$$

を解く特性根 ρ'_1, ρ'_2 が反対符号をもち、新体系が鞍点安定的となることが容易に確かめられる。

いま、 $\rho'_1 > 0 > \rho'_2$ と設定しよう。安定根 ρ'_1 はバブルの可能性の存在にも影響されず $\rho'_1 = \rho_1$ となる。したがって、 $\theta'_1 = \theta_1$ 、すなわち、安定多様体の傾きに変化なく図-1における固有ベクトル SS が妥当する。

ところで、Jacobian 行列 J' について

$$\text{tr}(J') = \rho'_1 + \rho'_2 = \frac{1}{\Delta} [-\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta] + \pi \quad (43)$$

がしたがう。しかるに、前項の Jacobian 行列 J に関する $\text{tr}(J)$ ((17)式)を想起し、 $\rho'_1 = \rho_1$ を考慮すれば、(43)式は、

$$\rho'_1 + \rho'_2 = \rho_1 + \rho_2 + \pi \quad (44)$$

$$\text{or } \rho'_2 = \rho_2 + \pi \quad (45)$$

を意味する。このとき、不安定固有ベクトルの傾き θ'_2 は

$$\theta'_2 = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \Delta\rho'_2}{\phi\lambda\eta} (< 0) \quad (46)$$

で表わされる。しかるに、前項の(25)式を想起し、(45)式を考慮すれば

$$\theta'_2 = \theta_2 - \frac{\Delta\pi}{\phi\lambda\eta} < \theta_2 \quad (47)$$

がしたがう。

(47)式は、確率的バブルが存在し得るところでの不安定固有ベクトル $U'U'$ が、バブルが存在しないところでのそれ UU より急勾配を成し、その勾配差は、バブル崩壊確率 π と、物価水準とファンダメンタル間のフィードバック効果 ($-\phi\lambda\eta/\Delta$) の規模とに依存するそれとなることを意味している。(図-1参照。不安定固有ベクトルは、点線 $U'U'$ で示される。)

以上から、通貨バブルからの期待キャピタル・ゲインが保険プレミアム (insurance premium) と利子差額を填補するものでなければならないから、バブル経路 $U'U'$ は、バブルの存在しない状況下の不安定経路 UU よりもより急速に均衡から乖離していくことが含意される。

- 1) 本項の議論について、本質的に Miller = Weller [11], Obstfeld = Rogoff [14] (Chap. 8) に負う。
- 2) Cagan [5] 参照。
- 3) かかる \bar{y} は、自然産出率 (natural rate of output) とみなされる。Obstfeld = Rogoff, *op. cit.*, (p. 610) 参照。
- 4) 安定固有ベクトルの傾きを θ_1 とするとき、 $k\eta \leq 1$ に応じて $\theta_1 \geq 0$ となる。 $k\eta < 1$ のとき、為替レートが貨幣ストックの変化に反応して長期的均衡をオーバーシュート (overshoot) し、傾き θ_1 を左方に上昇させる。(図-1参照。) 完全予見期待下でのオーバーシュート効果について、例えば、Azariadis [1] (Chap. 5) 参照。
- 5) 本項の議論について、多くを Miller = Weller, *op. cit.*, に負う。
- 6) Miller = Weller, *op. cit.*, (p. 173) 参照。

第2節 確率過程下の通貨バブル

1. Brown 運動過程

本節では、ファンダメンタルに確率的ショックが作用するところで、確率化された Dornbusch 型モデルに拠りながら確率的バブルの発生可能性が存在するときの物価水準、為替レートのあり方をみる。

まず、本項では、確率的 Dornbusch 型モデルにおいて、バブルが存在しない場合、次いで、存在し得る場合において、物価水準、為替レートが満たすべき基本方程式を導くことにする⁷⁾。

確率的経済環境における為替レートの変動をみるに際しては、貨幣モデル (monetary model) が広く用いられてきた⁸⁾。そこでは、貨幣の流通速度に対して累積的ショックがもたらす効果が検討された。基本方程式は、

$$m = p + p\bar{y} - \lambda E(de)/dt - v \quad (48)$$

$$e = p - p^* \quad (49)$$

$$dv = \alpha dz \quad (50)$$

で与えられる。ただし、 v は貨幣流通速度への累積的ショック、 $E(de)/dt$ は為替レートの期待変化率であり、 e は対外通貨の自国建て価値の対数値である。

(48)式は、貨幣市場の均衡条件を与えている。 $E(de)/dt$ 項は、外国為替の期待キャピタル・ゲイ

ンとみなせ、自国通貨保有の機会費用を表わすことになる。また、同項の変化は、国際間の利子差額が通貨裁定に基づくところでの貨幣保有誘因の変化を示しており、したがって、 $i = i^* + E(de)/dt$ が含意される。

(49)式は購買力平価が常に成立し、対数をとれば、いかなる財の自国通貨建て価格も、対外通貨建て価格と外国為替価格の和に均等化することを要請している。さらに、(50)式は、流通速度変数 v が分散 σ^2 をもつ Wiener 過程にしたがい、したがって、流速速度が連続時間表示のランダム・ウォークにしたがうことを意味している。

しかるに、対外変数と同様に自国産出量は外生変数とみなされ、ゼロに設定されるとき、

$$e = m + v + \lambda E(de)/dt = k + \lambda E(de)/dt \quad (51)$$

なる周知の関係がしたがい、 $k = m + v$ はファンダメンタルを表わすものとされる。

ところで、Miller=Weller [11] は、Phillips 曲線が価格設定の過程となる Dornbusch 型モデルの確率化を試みた。以下では、Miller=Weller, *op. cit.*, の試みにしたがい前項で示された確定的 Dornbusch 型モデルの Phillips 曲線式 ((3)ないし(34)式)に確率的ショックが作用する場合を想定し、まず、バブルが存在しない状況における物価水準、為替レートのあり方をみるものとする。

まず、バブル発生可能性がないものとし、ファンダメンタルの変動が Brown 運動過程にしたがうものとする。このとき、Phillips 曲線式に確率的ショックが作用するものとする、物価水準は

$$dp = \phi(y - \bar{y}) dt + \sigma dz \quad (52)$$

にしたがって変動する。

いま、前節におけると同様に経済主体が危険中立者であるものと想定すれば、通貨裁定式は、改めて

$$E(de) = (i^* - i) dt \quad (53)$$

と定式化される。

以上から、確率的 Dornbusch 型モデルの均衡体系は

$$m - p = ky - \lambda i \quad (54)$$

$$y = -vi - \eta(e + p - p^*) \quad (55)$$

$$dp = \phi(y - \bar{y}) dt + \sigma dz \quad (56)$$

$$E(de) = (i^* - i) dt \quad (57)$$

で与えられる。

しかるに、貨幣市場、生産物市場の均衡条件に変更はないから、上の体系の線型近似に際して、Jacobian 行列の係数要素にも変更はなく、したがって、 p, e を定常状態からの乖離幅で測るべく定義し直せば、体系の行列表示

$$\begin{bmatrix} dp \\ E(de) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & -\phi\lambda\eta \\ k\eta - 1 & k\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma dz \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

がしたがう。ただし、 $\Delta = \lambda + \nu k$ である。ここで、記号の簡略化のために Jacobian 行列を

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (59)$$

と略記しよう。ただし、 $a_{11} = -\phi(\nu + \lambda\eta)/\Delta$ 、 $a_{12} = -\phi\lambda\eta/\Delta$ 、 $a_{21} = (k\eta - 1)/\Delta$ 、 $a_{22} = k\eta/\Delta$ である。このとき、(58)式は

$$\begin{bmatrix} dp \\ E(de) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma dz \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

と表現し直される。

さて、為替レートがファンダメンタルと確定的な函数関係に立つものと想定する、すなわち

$$e = f(p) \quad (61)$$

と設定されるものとしよう。

ここで、(61)式に伊藤補題 (Ito's lemma) を適用し、 $(dp)^2 = dt$ を想起すれば

$$\begin{aligned} de &= f'(p) dp + \frac{\sigma^2}{2} f''(p) (dp)^2 \\ &= f'(p) dp + \frac{\sigma^2}{2} f''(p) dt \end{aligned} \quad (62)$$

がしたがう。しかるに、(60)式は

$$dp = (a_{11}p + a_{12}e) dt + \sigma dz \quad (63)$$

を意味し、両辺の期待値をとれば

$$E(dp) = (a_{11}p + a_{12}e) dt \quad (64)$$

を得る。また、(60)式は

$$E(de) = (a_{21}p + a_{22}e) dt \quad (65)$$

を意味する。いま、(62)式の両辺の期待値をとり、(64)式を考慮すれば

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(p) dt + f'(p)(a_{11}p + a_{12}e) dt - (a_{21}p + a_{22}e) dt = 0 \quad (66)$$

がしたがう。さらに、(61)式を想起すれば、(66)式は

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(p) + (a_{11}p + a_{12}e)f'(p) - (a_{21}p + a_{22}e) = 0 \quad (67)$$

$$\text{or } \frac{\sigma^2}{2} f''(p) + (a_{11}p + a_{12}f(p))f'(p) - (a_{21}p + a_{22}f(p)) = 0 \quad (68)$$

と変形される。しかるに、(68)式は、2階非線型微分方程式となり、一般に陽表的解を導くことが

できない。そこで、 $f(0)=0$ を満たす原点を通る解曲線の性質をみることにする。

さて、安定固有ベクトル SS (不安定固有ベクトル UU) の特性である $f''(p)=0$, $f'(p)=\theta_1$, $f'(p)=\theta_2$ は、上の(68)式を満たし、2つの固有ベクトル自体が解となっている。 $f(0)=0$ を満たすそれ以外の無数の解曲線は原点を変曲点として上の2つの線型解ベクトルの周りに個々の形状を描くことが確かめられる。

前節におけると同様に、特性方程式 $|\rho I - J| = 0$ を満たす特性根に対応する固有ベクトルの傾きを $\theta = e/p$ とするとき、

$$\rho \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (69)$$

がしたがいい、直ちに、

$$a_{11} + a_{12}\theta = \rho \quad (70)$$

$$a_{21} + a_{22}\theta = \rho\theta \quad (71)$$

がしたがう。ただし、 $a_{11} = -\phi(\nu + \lambda\eta)/\Delta$, $a_{12} = -\phi\lambda\eta/\Delta$, $a_{21} = (k\eta - 1)/\Delta$, $a_{22} = k\eta/\Delta$ である。(70), (71)式から

$$-a_{12}\theta^2 + (a_{22} - a_{12})\theta + a_{21} = 0 \quad (72)$$

がしたがいい、 $k\eta < 1$ の仮定の下で

$$\theta_1 = \frac{1 - k\eta}{k\eta - \Delta\rho_1} > 0 \quad (73)$$

$$\theta_2 = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \Delta\rho_2}{\phi\lambda\eta} < 0 \quad (74)$$

と帰結されることは、前節でみたごとくである。

ここで、原点を通る解曲線 $f(p)$ の曲率を原点における傾きの2次函数として表現することによって確かめよう⁹⁾。いま、ある時点 t に利用可能な情報に基づいて(62)式の条件付き期待値をとれば、

$$E(de) = f'(p)E(dp) + \frac{\sigma^2}{2}f''(p)dt \quad (75)$$

を得る。(75)式は、さらに

$$f''(p) = \frac{E(dp)}{\sigma^2/2} \left(\frac{E(de)}{E(dp)} - f'(p) \right) \quad (76)$$

と変形される。ここで、確定的解曲線の任意の点における傾きを $g(p, e)$ で表わせれば、(70), (71)式から

$$g(p, e) \equiv \frac{de}{dp} = \frac{a_{21}p + a_{22}e}{a_{11}p + a_{12}e} \quad (77)$$

がしたがう。(77)式を考慮すれば、(76)式は

$$f''(p) = \frac{E(dp)}{\sigma^2/2} (g(p, e) - f'(p)) \quad (80)$$

と表現し直される。(80)式は、同一点において、解曲線の傾き $f'(p)$ が確定的解曲線のそれ $g(p, e)$ と異なるとき $f''(p) \neq 0$ となり、解曲線 $f(p)$ の曲率が現われてくる。直ちに、 $E(dp) > 0$ ($E(dp) < 0$) のとき、 $\text{sgn} f''(p) = \text{sgn}(g(p, e) - f'(p))$ ($\text{sgn} f''(p) = \text{sgn}(f'(p) - g(p, e))$) がしたがう。

図-3において、まず、 $E(dp) < 0$ 、すなわち、物価水準の期待定常線 $E(dp) = 0$ の下側を想定する。このとき、直線 SS の下側の領域 B において $g(p, e) < f'(p)$ 、したがって $f''(p) > 0$ となり、 p が上昇するにつれ解曲線は直線 SS から乖離していく。これに対して、 SS と $E(dp) = 0$ の2直線の間の領域 A においては、 $f'(p) < g(p, e)$ となり曲率は逆転する。

期待定常線 $E(dp) = 0$ の上側において不安定固有ベクトルの近くに変曲点が現われる。このとき、直線 UU の上側の領域 A' において、やがて、 Ta 点において1つの解曲線に接するまで $f'(p)$ は p の低下につれて増加していく。しかるに、 Ta 点を通る確率的体系の解は、常に、同一点を通る確定的体系の位相曲線の下側に位置しなければならず、したがって、不安定固有ベクトル UU に漸近していく。同様の議論が Tb 点についても妥当する。(図-3参照。)

最後に、バブル発生可能性が存在する場合を想定しよう。

前節におけると同様に、特性方程式 $|\rho I - J'| = 0$ を満たす特性根に対応する固有ベクトルの傾きを $\theta' = e/p$ とすると、

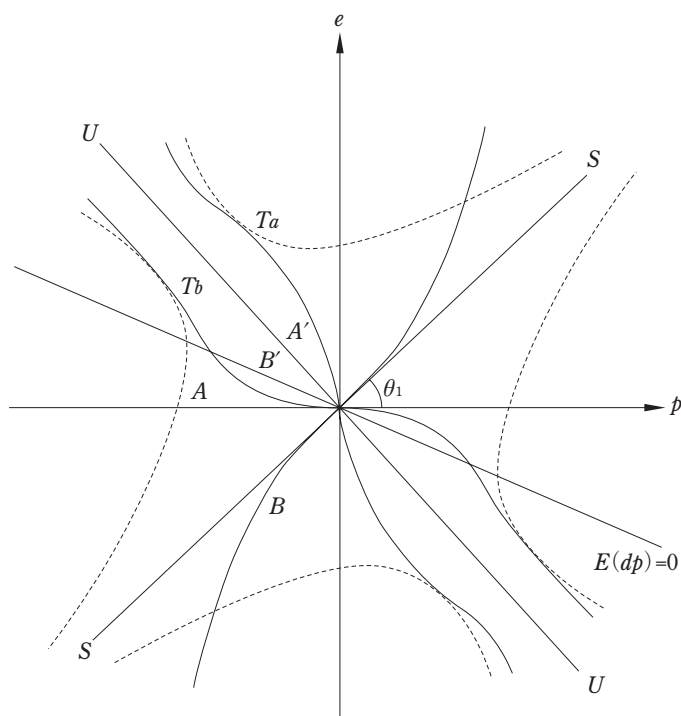


図-3

$$\rho' \begin{bmatrix} 1 \\ \theta' \end{bmatrix} = J' \begin{bmatrix} 1 \\ \theta' \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\text{or} \begin{bmatrix} \rho' + \frac{1}{\Delta} \phi(\nu + \lambda\eta) & \frac{1}{\Delta} \phi\lambda\eta \\ \frac{1}{\Delta} (1 - k\eta + \pi\theta'_1 \Delta) & \rho' - \frac{1}{\Delta} (k\eta + \pi\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

が満たされなければならない。しかるに、(81)式の表現は前節の(42)式のそれに準じており、したがって、再び $\rho'_1 = \rho_1$ 、 $\rho'_2 = \rho_2 + \pi'$ が妥当し、安定固有ベクトル、不安定固有ベクトルの傾きは、それぞれ

$$\theta'_1 = \frac{1 - k\eta}{k\eta - \rho_1 \Delta} = \theta_1 \quad (83)$$

$$\theta'_2 = -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \rho_2 \Delta + \pi \Delta}{\phi\lambda\eta} < -\frac{\phi(\nu + \lambda\eta) + \rho_2 \Delta}{\phi\lambda\eta} = \theta_2 \quad (84)$$

で与えられる。安定固有ベクトルは、バブルの発生可能性に影響されず、不安定固有ベクトル $U'U'$ は、バブル発生の可能性によって、より急勾配を成すことが帰結される。(図-4参照。バブルの発生可能性が存在する場合は点線によって示される。)

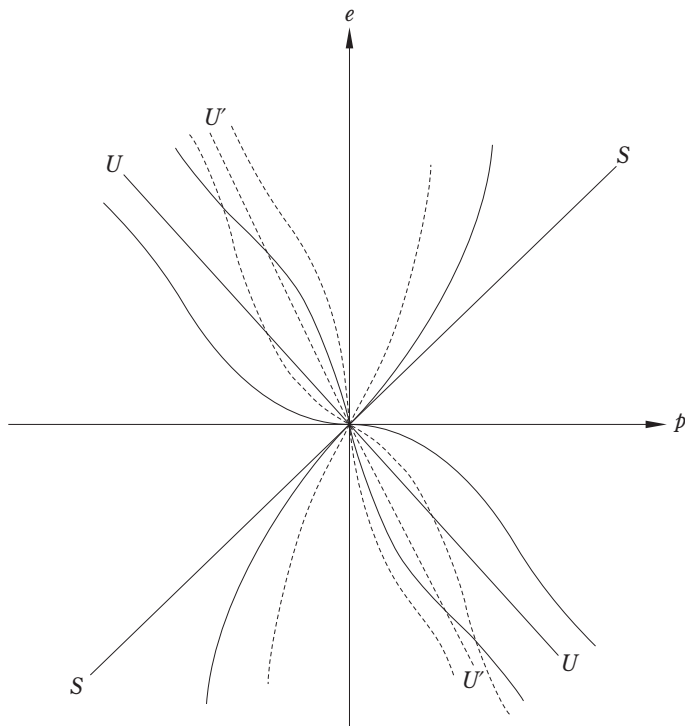


図-4

2. 平均回帰過程

本項では、ファンダメンタルが平均回帰過程にしたがって変動するところでの物価水準、為替レートのあり方をみる¹⁰⁾。

もし、ファンダメンタルがより一般化された線型確率微分方程式にしたがって変動するものとする、そこでの確率微分方程式は

$$dp(t) = \{u(t)p(t) + a(t)\} dt + \sigma(t) dz(t) \quad (85)$$

で表わされる。ただし、 $u(t), a(t), \sigma(t)$ は確定的な時間の関数であり、また、 $z(t)$ は、Wiener 過程である。しかるに、もし、 $u(t) = -a, a(t) = 0, \sigma(t) = \sigma$ と特定すれば、(85)式は

$$dp(t) = -ap(t) dt + \sigma dz(t) \quad (86)$$

と書き改められる。ここで、さらに、(86)式を

$$dp(t) = -a \{p(t) - 0\} dt + \sigma dz(t) \quad (87)$$

と書き改めると、 $p(t) - 0 > 0$ のとき $dp(t) < 0$ 、 $p(t) - 0 < 0$ のとき $dp(t) > 0$ がしたがう、(87)式は、 $p(t)$ の長期的期待値 0 へのエラー修正を示している。かかる過程は、長期的期待値に戻ろうとするメカニズムが働いている平均回帰過程 (mean reverting process) の簡単例で Ornstein = Uhlenbeck 過程と呼ばれる。このとき、(86)式は、物価水準の変動が為替レートの変動からの直接的影響を受けないことを示唆している。(86)式と整合する確率化 Dornbusch 型モデルの均衡体系は、時間要素を省略すれば

$$m - p = ky - \lambda i \quad (88)$$

$$y = -\nu i - \eta (p - p^*) \quad (89)$$

$$dp = \phi (y - \bar{y}) dt + \sigma dz \quad (90)$$

$$E(de) = (i^* - i) dt \quad (91)$$

で表わされる。(89)式に為替レート e が含まれないことに注意されたい。

(88), (89)式から

$$dp = \phi \left[\frac{1}{\lambda + \nu k} (\nu(m - p) - \lambda \eta (p - p^*)) - \bar{y} \right] + \sigma dz \quad (91)$$

$$E(de) = i^* - \frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta)p - m + k\eta p^*] \quad (92)$$

がしたがう。ここで、(91), (92)式を $dp = E(de) = 0$ を満たす定常状態 (\bar{p}, \bar{e}) で線型近似すれば

$$dp = -\frac{1}{\lambda + \nu k} [\phi (\nu + \lambda \eta) (p - \bar{p})] + \sigma dz \quad (93)$$

$$E(de) = -\frac{1}{\lambda + \nu k} [(1 - k\eta) (p - \bar{p}) - k\eta (e - \bar{e})] \quad (94)$$

がしたい、行列表示すれば

$$\begin{bmatrix} dp \\ E(de) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & 0 \\ k\eta - 1 & k\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - \bar{p} \\ e - \bar{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma dz \\ 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

を得る。ただし、 $\Delta = \lambda + \nu k$ である。ここで、新たな Jacobian 行列を \hat{f} とすれば

$$\hat{f} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & 0 \\ k\eta - 1 & k\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (96)$$

と表現される。再び、 p, e を定常状態からの乖離幅で測るべく定義し直せば、(95)式は

$$\begin{bmatrix} dp \\ E(de) \end{bmatrix} = \hat{f} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma dz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma dz \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

と表現し直される。

ここで、為替レートがファンダメンタルの確定的函数である、すなわち

$$e = f(p) \quad (98)$$

と措定し、伊藤補題を適用すれば

$$de = f'(p) dp + \frac{\sigma^2}{2} f''(p) dt \quad (99)$$

を得る。しかるに、(97)式から

$$dp = a_{11} p dt + \sigma dz \quad (100)$$

がしたい、期待値をとると

$$E(dp) = a_{11} p dt \quad (101)$$

を得る。さらに、(97)式から

$$E(de) = (a_{21} p + a_{22} e) dt \quad (102)$$

がしたがう。いま、(99)式の期待値をとり(98)式を考慮すれば

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(p) + a_{11} p f'(p) - (a_{21} p + a_{22} e) = 0 \quad (103)$$

$$\text{or } \frac{\sigma^2}{2} f''(p) + a_{11} p f'(p) - (a_{21} p + a_{22} f(p)) = 0 \quad (104)$$

なる2階線型微分方程式を得る。しかるに、(104)式の同次部分

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(p) + a_{11} p f'(p) - a_{22} f(p) = 0 \quad (105)$$

の両辺に $1/a_{22} \equiv \xi$ を乗じ、 $-a_{11} \equiv \delta$ と設定すれば、(105)式は

$$\xi \frac{\sigma^2}{2} f''(p) - \xi \delta p f'(p) - f(p) = 0 \quad (106)$$

と変形される。ここで、 $f(p) = g(z)$ と設定し、 $z = \delta p^2 / \sigma^2$ と置き (106) 式に代入すれば

$$2\delta\xi z g''(z) + (\delta\xi - 2\delta\xi z) g'(z) - g(z) = 0 \quad (107)$$

がしたがいい、さらに、(107) 式は

$$z g''(z) + \left(\frac{1}{2} - z \right) g'(z) - \frac{1}{2\sigma\xi} g(z) = 0 \quad (108)$$

と変形される。

ところで

$$x(x-1) \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ -\nu + (1+a+\beta)x \right\} \frac{du}{dx} + a\beta u(x) = 0 \quad (109)$$

で表わされる型の微分方程式は Gauss の超幾何微分方程式 (Gaussian hypergeometric equation) と呼ばれ、3つの確定特異点 $0, 1, \infty$ をもつ。ここで、変数の置換 $x \rightarrow x/\beta$ を行なうと

$$x \left(\frac{x}{\beta} - 1 \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ -\nu + (1+a+\beta) \frac{x}{\beta} \right\} \frac{du}{dx} + a u = 0 \quad (110)$$

となり、特異点は $0, \beta, \infty$ にある。ここで、特異点 β を ∞ に合流させる、すなわち、極限移行 $\beta \rightarrow \infty$ を施すと

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (\nu - x) \frac{du}{dx} - a u = 0 \quad (111)$$

を得る。(111) 式の微分方程式は合流を通じて得られた超幾何微分方程式であり、合流型超幾何微分方程式 (confluent hypergeometric equation)、または Kummer の方程式 (Kummer's equation) と呼ばれる¹¹⁾。かかる合流型超幾何微分方程式の解は、以下の級数で表わされる合流型超幾何関数 (confluent hypergeometric function) で与えられる。1つの解は

$$u_1(x) = F(a, \nu, x) = 1 + \frac{a}{\nu} x + \frac{a(a+1)x^2}{\nu(\nu+1)2!} + \frac{a(a+1)(a+2)x^3}{\nu(\nu+1)(\nu+2)3!} + \dots \quad (112)$$

で与えられる。さらに、(112) 式と独立なもう1つの解があり

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x^{1-\nu} F(a-\nu+1, 2-\nu, x) \\ &= x^{1-\nu} \left\{ 1 + \frac{a-\nu+1}{2-\nu} x + \frac{(a-\nu+1)(a-\nu+2)}{2!(2-\nu)(3-\nu)} x^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a-\nu+1)\dots(a-\nu+n-1)}{n!(2-\nu)(3-\nu)\dots(n+1-\nu)} x^n + \dots \right\} \end{aligned} \quad (113)$$

で与えられる。

しかるに、上の(109)式の微分方程式は、合流型超幾何微分方程式に外ならない。 $\xi \equiv 1/a_{22}$, $\delta \equiv -a_{11}$ を想起し、上の議論を適用すれば、級数表示される合流型超幾何関数 F による数値解

$$\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{p}) &= F\left(\frac{1}{2\delta\xi}, \frac{1}{2}, \frac{\delta\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right) \\
&= F\left(-\frac{a_{22}}{a_{11}}, \frac{1}{2}, -\frac{a_{11}\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right) \\
&= F\left(\frac{k\eta}{\phi(\nu+\lambda\eta)}, \frac{1}{2}, \frac{\phi(\nu+\lambda\eta)\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right)
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\boldsymbol{p}) &= \frac{\sqrt{\delta}}{\sigma}\boldsymbol{p}F\left(\frac{1}{2\delta\xi} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\delta\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{-a_{11}}}{\sigma}\boldsymbol{p}F\left(-\frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a_{11}\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\phi(\nu+\lambda\eta)}}{\sigma}\boldsymbol{p}F\left(\frac{k\eta}{\phi(\nu+\lambda\eta)} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\phi(\nu+\lambda\eta)\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right)
\end{aligned} \tag{115}$$

がしたがう。

次に、(104)式の非同次部分の特解を求めるべく $f(\boldsymbol{p}) = c\boldsymbol{p}$ を試みる。これを(104)式に適用すれば

$$c(a_{11} - a_{22})\boldsymbol{p} = a_{21}\boldsymbol{p} \tag{116}$$

$$\text{or } c = \frac{a_{21}}{a_{11} - a_{22}} \tag{117}$$

を得る。これより $a_{21} = k\eta - 1$ を想起すれば、特解は

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{a_{21}}{a_{11} - a_{22}}\boldsymbol{p} = \frac{1 - k\eta}{\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta}\boldsymbol{p} \tag{118}$$

で与えられる。以上から、為替レート的一般解は、

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{p}) &= \frac{1 - k\eta}{\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta}\boldsymbol{p} + A_1 F\left(\frac{k\eta}{\phi(\nu + \lambda\eta)}, \frac{1}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right) \\
&\quad + A_2 \frac{\sqrt{\phi(\nu + \lambda\eta)}}{\sigma}\boldsymbol{p} F\left(\frac{k\eta}{\phi(\nu + \lambda\eta)} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)\boldsymbol{p}^2}{\sigma^2}\right)
\end{aligned} \tag{119}$$

で表わされる。ただし、 A_1, A_2 は境界値から確定される未定定数である。

さて、固有ベクトルの傾きを調べておこう。いま、特性根 ρ に対する固有ベクトルの傾きを $\theta = e/\boldsymbol{p}$ とすれば

$$[\rho I - \widehat{J}] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{120}$$

$$\text{or } \begin{bmatrix} \rho + \frac{1}{\Delta}\phi(\nu + \lambda\eta) & 0 \\ \frac{1}{\Delta}(1 - k\eta) & \rho - \frac{1}{\Delta}k\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{121}$$

が満たされなければならない。(121)式は、まず、

$$\frac{1}{\Delta}(1 - k\eta) + \left(\rho - \frac{1}{\Delta}k\eta\right)\theta = 0 \tag{122}$$

を導き、 $k\eta < 1$ の仮定の下で

$$\theta = \frac{1-k\eta}{k\eta-\rho_1\Delta} > 0 \quad (123)$$

がしたがう。このとき、(123)式は安定特性根 ρ_1 、したがって安定固有ベクトルに関わるそれとなり、安定固有ベクトルの傾き θ_1

$$\theta_1 = \frac{1-k\eta}{k\eta-\rho_1\Delta} \quad (124)$$

がしたがう。残る不安定特性根 ρ_2 に対して、(121)式は

$$\rho_2 + \frac{1}{\Delta}\phi(\nu + \lambda\eta) + 0 \times \theta_2 = 0 \quad (125)$$

を導き、

$$\theta_2 = \frac{\rho_2\Delta + \phi(\nu + \lambda\eta)}{0} = \infty \quad (126)$$

がしたがう。

最後に、 $dp=0$ を満たす直線の傾きを θ_p とすると

$$dp = -\frac{1}{\Delta}\phi(\nu + \lambda\eta)p = 0 \quad (127)$$

がしたがう、 $\theta_p = \infty$ を得る。

以上から、ファンダメンタルが平均回帰過程の簡単例である Ornstein = Uhlenbeck 過程にしたがうごとく転換が施されても、安定固有ベクトルには影響はみられず、不安定固有ベクトルの傾き、定常価格の傾きはともに ∞ となり、たて軸に一致することが帰結される。(図-5参照。)

さて、崩壊確率 π でバブルの発生の可能性が存在する場合を想定しよう。

上の議論から明らかのごとく、Jacobian 行列 \hat{f} が以下の \hat{f}' に変更になるだけで形式的には上と同一の議論が適用可能となる。新体系の下でしたがう Jacobian 行列 \hat{f}' は、

$$\hat{f}' = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\phi(\nu + \lambda\eta) & 0 \\ k\eta - 1 - \pi\theta_1\Delta & k\eta + \pi\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \quad (128)$$

で与えられる。ただし、 $a'_{21} = k\eta - 1 - \pi\theta_1\Delta$ 、 $a'_{22} = k\eta + \pi\Delta$ である。

上と同様の手続きを適用すれば、バブルの発生可能性が存在するところで解が満たすべき微分方程式は

$$\frac{\sigma^2}{2}f''(p) + a_{11}pf'(p) - (a'_{21}p + a'_{22}e) = 0 \quad (129)$$

$$\text{or } \frac{\sigma^2}{2}f''(p) + a_{11}pf'(p) - (a'_{21}p + a'_{22}f(p)) = 0 \quad (130)$$

で与えられる。ここで、(130)式の同次部分に $1/a'_{22} \equiv \xi'$ 、 $-a_{11} \equiv \delta$ を適用すれば

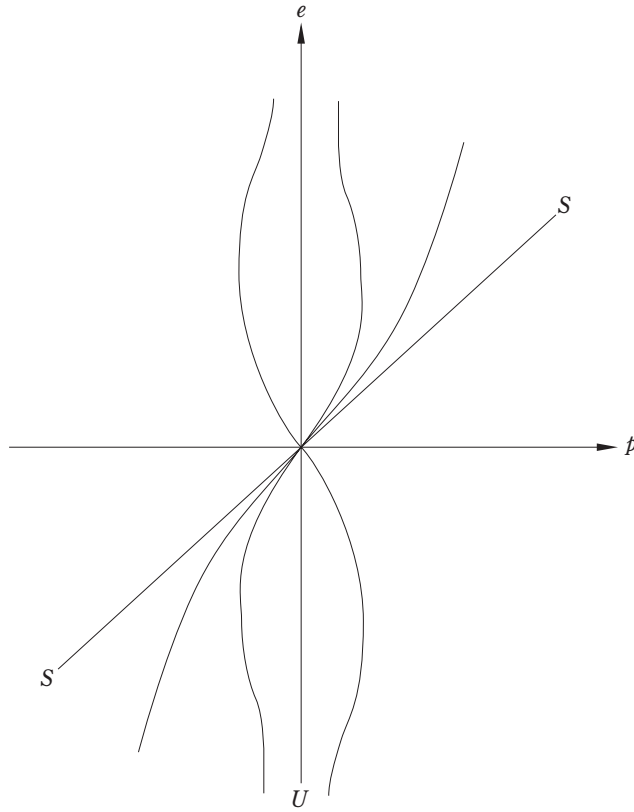


図-5

$$\xi' \frac{\sigma^2}{2} f''(p) - \xi' \delta p f'(p) - f(p) = 0 \quad (131)$$

が正しいか、解は

$$f_1(p) = F\left(\frac{k\eta + \pi\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta)}, \frac{1}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)p^2}{\sigma^2}\right) \quad (132)$$

$$f_2(p) = \frac{\sqrt{\phi(\nu + \lambda\eta)} p}{\sigma} F\left(\frac{k\eta + \pi\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta)} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)p^2}{\sigma^2}\right) \quad (133)$$

で与えられる。

非同次部分の特解は

$$f(p) = \frac{1 - k\eta + \pi\theta_1\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta + \pi\Delta} p \quad (134)$$

で与えられ、したがって、為替レート的一般解は

$$f(p) = \frac{1 - k\eta + \pi\theta_1\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta) + k\eta + \pi\Delta} p + A_1' F\left(\frac{k\eta + \pi\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta)}, \frac{1}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)p^2}{\sigma^2}\right) + A_2' \frac{\sqrt{\phi(\nu + \lambda\eta)} p}{\sigma} F\left(\frac{k\eta + \pi\Delta}{\phi(\nu + \lambda\eta)} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\phi(\nu + \lambda\eta)p^2}{\sigma^2}\right) \quad (135)$$

で与えられる。ただし、 A_1, A_2 は境界値から確定される未定定数である。

ところで、新体系における安定特性根 ρ'_1 は、バブルの発生可能性に影響されず $\rho'_1 = \rho_1$ 、したがって、安定固有ベクトルの傾き θ'_1 について $\theta'_1 = \theta_1$ がしたがう。さらに、不安定固有ベクトルの傾き θ'_2 が ∞ となることが容易に確かめられる。(86)式で表わされるトレンド項のない Ornstein = Uhlenbeck 過程にファンダメンタルがしたがうところでは、バブル発生の可能性の存在にも関わらず、固有ベクトルの位置に変更が生じないことが帰結される。さらに、 $dp=0$ を満たす定常価格線の傾きも ∞ に留まることは言うまでもない。

7) 本項の議論における手続きの多くを Miller = Weller [11], [12], [13] に負う。

8) 例えば, Krugman [10], Froot = Obstfeld [8], Flood = Garber [7], Bertola = Caballero [2] 等参照。

9) 以下の議論の手続きとして, Miller = Weller [12], さらに Petrovskii [15], Hirsch = Smale [9] 参照。

10) ファンダメンタルが平均回帰過程にしたがうところでのバブルの議論として, Sutherland [18] 参照。ただし, そこでは貨幣理論が援用されている。

11) 合流型超幾何微分方程式に関して, 例えば, Slater [16], [17] 参照。

結びにかえて

ファンダメンタルの変動が様々な過程にしたがうところで、通貨バブルの発生可能性の存在が為替レート、物価水準にもたらすフィードバック効果を比較検討してきた。そこでは、Miller = Weller の示唆にしたがって貨幣モデルに代わる確率化が施された Dornbusch 型モデルが援用された。

まず、合理的期待の下での完全予見期待均衡体系が鞍点均衡を導くことが確認された。次に、Blanchard 型の確率的バブルの発生可能性の存在が、上の均衡体系における Phillips 曲線に作用し、鞍点均衡を構成する不安定固有ベクトルを負の方向に、より急勾配を成すべくシフトさせるフィードバック効果をもたらすことが確認された。

次に、ファンダメンタルが確率過程にしたがう場合が検討された。まず、確率過程が Brown 運動過程に特定される時、不安定固有ベクトルの周りにチューリップ型の解曲線が現われ、確率的バブルの発生可能性の存在は、チューリップ型の解曲線をしたがえたまま不安定固有ベクトルが一層の急勾配を成すことが確かめられた。

最後に、ファンダメンタルが平均回帰過程の簡単例である Ornstein = Uhlenbeck 過程にしたがうとき、鞍点均衡を構成する不安定固有ベクトルが周りにチューリップ型の解曲線をしたがえたまま為替レートを測るたて軸に重なることが確かめられた。しかしながら、上の議論の帰結と相違して、確率的バブルの発生可能性の存在によって不安定固有ベクトルが影響されることはなく、チューリップ型解曲線をしたがえたまま、たて軸に重なり続けることが確かめられた。さらに、平均回帰過程は、級数表示される合流型超幾何関数のタームでの数値解をもたらすことが知られており、確率的バブルの発生可能性が存在する場合、存在しない場合のそれぞれについて、数値解が導かれた。

通貨バブルが為替レートと物価水準にもたらすフィードバック効果への研究の方向づけは、協調介入にみるごとき政策的コミットメントの安定化効果の有効性に対する関心の高揚によって促されたと言うことができよう。ファンダメンタルが平均回帰過程にしたがうところで、為替レートに設定される変動域、目標相場圏の範囲内での上のフィードバック効果のあり様をみることは、我々の

議論の一つの興味深い発展化の方向であろう。

References

- [1] C. Azariadis, *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, 1993.
- [2] G. Bertola and R. J. Caballero, "Sustainable Intervention Policies and Exchange Rate Dynamics," in P. R. Krugman and M. H. Miller, eds., *Exchange Rate Targets of Currency Bands*, Cambridge University Press, 1992.
- [3] O. J. Blanchard, "Speculative Bubbles, Crashes and Rational Expectations," *Economics Letters*, 1979.
- [4] _____, and M. Watson, "Bubbles, Rational Expectations, and Financial Markets," in P. Wachtel, ed., *Crises in Economic and Financial Structure*, D.C. Heath and Co., 1982.
- [5] P. Cagan, "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," in M. Friedman, ed., *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press, 1956.
- [6] R. Dornbusch, "Expectations and Exchange Rate Dynamics," *Journal of Political Economy*, 84, 1976.
- [7] R. P. Flood and P. M. Garber, "A Model of Stochastic Process Switching," *Econometrica*, 51, 1983.
- [8] K. A. Froot and M. Obstfeld, "Exchange-Rate Dynamics under Stochastic Regime Shifts: A Unified Approach," *Journal of International Economics*, 31, 1991.
- [9] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [10] P. R. Krugman, "Target Zones and Exchange Rate Dynamics," *Quarterly Journal of Economics*, 116, 1991.
- [11] M. H. Miller and P. Weller, "Currency Bubbles Which Affect Fundamentals: A Qualitative Treatment," *Economic Journal*, 100, 1990.
- [12] _____, and _____, "Currency Bands, Target Zones, and Price Flexibility," *IMF Staff Papers*, 38, 1991.
- [13] _____, and _____, "Exchange Rate Bands with Price Inertia," *Economic Journal*, 101, 1991.
- [14] M. Obstfeld and K. Rogoff, *Foundation of International Macroeconomics*, MIT Press, Fourth Printing, 1991.
- [15] I. G. Petrovskii, "Ordinary Differential Equations," in A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev, eds., *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*, Vol. 1, MIT Press, 1969.
- [16] L. J. Slater, *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1960.
- [17] _____, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [18] A. Sutherland, "Intrinsic Bubbles and Mean-Reverting Fundamentals," *Journal of Monetary Economics*, 37, 1996.
- [19] J. Tirole, "On the Possibility of Speculation under Rational Expectations," *Econometrica*, 50, 1982.
- [20] _____, "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica*, 53, 1985.