

# 青木憲二先生のこと

## On My Memory of Professor Kenji Aoki

ネットワーク情報学部 佐藤 創

School of Network and Information Hajime SATO

### 1 はじめに

青木憲二先生とは1993年の夏、ロンドンの中環街で食事をともにしたことがありました。先生は在外研究を終えられて帰国される時、私はその逆で在外研究を始める時でした。いつもながらの端正な表情で、やや日焼けした貴公子という印象がありました。

そのとき交わした研究上の話しは記憶に残っていませんが、先生は入国前に両替したポンドが値下がりしたことを残念がって、必要に応じて両替するのがよいと私にアドバイスされたことを覚えています。おかげで私は少し得をしたように思います。

私は青木先生と専門分野に共通性があり、同じ担当科目を分担する関係もあって、入職されたときから親しく接しました。とくに先生は、ネットワーク情報学部開設の際、数学の教職課程の設置に尽力されました。教育の実践では「安易に教職の履修単位を与えると、教壇に立つ本人のためにならない」というお考えで、学生には厳しく対処されました。私も「自由研究」と称する科目で教職を目指す学生の補修を行ってきましたが、この方針に基本的に賛成です。

一般の数学教育についても熱心な教育者であり、最初に所属した経営学部時代から「文系大学でいかに数学を教えられるか」をご自身のテーマとされていました。その意味では私も苦勞を共にしてきたと言えます。

論争もしました。例えば、先生が「集合  $A$  について  $A = A$  を証明せよ」という問題を出されたのを知り、私は疑問を投げかけました。 $A = A$  は自明であって証明の対象ではない、このような出題は教育上好ましくない、というのが私の意見でした。先生は「 $A = B \Leftrightarrow A \subset B$  かつ  $B \subset A$ 」の応用問題として考えられていたようですが、決着のないままになりました。

比較的最近のことですが、先生は2005年とその翌年に学部論集「専修ネットワーク&インフォメーション」に2篇の啓蒙的な論文を投稿されました。私は当初からそ

の内容に関心を持ち、感想を伝えたいと思っていました。残念ながらそれも果たせないままになったのです。いまここで、その論文を紹介して先生を偲ぶことにしたいと思います。そして、この論文を読んでみたいと皆さんに思っただけのように解説を試みます。

### 2 「直角三角形をコンピュータに教えるには？」

この論文[1]は2004年に亡くなった高津信三初代学部長を追悼する気持ちを込めて書かれたものです。

そのテーマはまえがきにあるように、「与えられた三角形が直角三角形かどうかをコンピュータに判断させるアルゴリズム、ないしプログラムを考える」ということです。これはまさに私が継続的に担当してきた1年生前期の基礎科目「アルゴリズム的思考法」でも扱えるテーマであって、大いに親しみを覚えました。

●まず、「三角形をコンピュータに与える」とはどういうことでしょうか。描かれた三角形をスキャナーで取り込むことをすぐに思い浮かべる人もあるでしょうが、CADの技術者であった先生はここではそう考えません。ユークリッドに遡るまでもない現代の常識ですが、三角形とは3点を結ぶ線分で囲まれたもの、線は太さはないもの、点は大きさはないものと規定する「イデア」の世界が大前提です。先生はこれを「モデル化」と呼びました。

したがって、三角形を与えるには「数値情報」として3頂点の座標を示せばよい。さらに、合同なものは同一視して、「三辺」「二角挟辺」「二辺挟角」のいずれかを指定してもよいと述べています。論文では、

(1) 3点の座標  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  を指定する方法と、

(2) 3辺の長さ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  を指定する方法

の2つが取り上げられます。

●次いで方法 (1), (2) のそれぞれについて、「三角形の構成条件」を確認し、それから「直角をコンピュータにどのように教えるか」という話題に移ります。

ここで読者には、三角形の面積と行列式の関係、三角形の角度とベクトルの内積の関係、ピタゴラスの定理の意味などの理解が求められています。

●結論として、直角三角形判別アルゴリズムが Pascal-like のプログラムによって簡潔に記されます。

このプログラムで注目すべきことは、アイデアの世界から再び現実の世界に戻ることです。コンピュータは“無骨者”で、アイデアの世界を実に荒っぽく処理する現実の権化的存在です。2つの数が等しいかどうか判別する精度に不可避的な限界がある、ということです。そのための、微小な量を表すイプシロン  $\epsilon$  が何度も登場しています。この辺り、CAD のエンジニアでもあった数学者青木先生の面目躍如たるものがあります。

アルゴリズムやプログラミングを習得中の学生諸君は、ぜひ、このプログラムを自分の馴染んでいる言語で記述して、実際にコンピュータで実行してみてください。必ずや収穫があること、疑いなしです。

### 3 「三角形の中で直角三角形はどれくらいあるの？」

この論文 [2] も引き続き直角三角形を扱っていますが、テーマは全く別のところにあります。それは表題に端的に表現された通りです。私はこちらの方により強い共感を覚えました。先生の意図するところは表題を見てすぐにわかるのですが、改めて読んでみると、テーマの料理の仕方、味の付け方は先生独特のもので、狙いすまして放ったシュートのような小気味よさがあります。

ちょっと難しいので解説は長くなります。

●先生は冒頭で読者に問題提起をします。

三角形は無限にいくらでもある。その中で直角三角形もやはり無限にたくさんある。しかし、適当に三角形を描いたときそれが直角三角形になることは滅多にない。

問 I 両方とも無限にあるのに一方は非常に少ないとはどういうことか？ どのように理解したらよいか？

別の表現が面白いです。

問 II 全ての三角形の入った袋がある。それから1つ抜き出した三角形が直角三角形である確率はいくつだろう？

●この筋立てについて少し考えてみました。「健全な常識」の中で育った人に、この問いかけの面白さがわかるだろうか、と。歌劇でも歌舞伎でも、碁でも将棋でも、それを面白いと思う人はその魅力を体得しています。そうでない人には面白がる人の思いを推し量ることができません。先生が面白がっているのはズバリ、「無限」です。

はたして「三角形は無限にある」と言ってもよいでしょうか。「健全な常識」はまず、三角形を数えるという発想を拒絶します。その必要もなければ、数え方の見当もつかないからです。「数えられないから無限にあるというのは納得できない！」漠然とでもそう感じられたら、その先を読む心づもりができたというものです。

一方、全ての三角形が入った袋を差し出す青木先生を想像できるでしょうか。「三角形を一つ引いて下さい。直角三角形なら当りです」と言っているようです。まさにシュールリアリズムの世界です。この世界を感じたら、その先を読む準備ができたと思ってよいでしょう。

●この先はどうなっているのでしょうか。先生は一つ一つの三角形にタグをつけます。そのタグは三角形の3辺の長さを小さい順にならべたもので、

$$(a, b, c), \quad 0 < a \leq b \leq c < a + b$$

と説明されています。最後の「不等式」 $c < a + b$  は、“ロバにも分かる”と言われている「三角形の構成条件」（二辺の和は他の一辺より大なり）です。

さて、一体、タグはどれだけ用意すればよいでしょう？ こう考えていくと、有限枚のタグでは足りないことがよく理解できます。三角形を入れた袋は、このタグを入れた袋と考えればよいでしょう。

このところ原文では、全ての三角形の集合を  $T$  (“Triangle”) とおき、全てのタグの集合を  $I$  (“不等号”) とした上で、2つの集合は同一視できる（1対1に対応すること。記号では  $T \simeq I$  で表す）と慎重に表現されています。

●直角三角形の考察をしましょう。直角三角形も三角形ですからタグ  $(a, b, c)$  がついています。直角三角形だから「等式」 $a^2 + b^2 = c^2$  を満たします（なお、この等式を満たせば不等式  $c < a + b$  も満たすことは確認できます）。この性質をもつタグには赤鉛筆で印をつけることにします。

さて、赤い印のついたタグは無限にあるのでしょうか？ その答えは簡単です。2辺の長さ  $a$  と  $b$  を勝手に選び、最も長い辺の長さが  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  であるタグだけを集めて

みましょう。それらは全て直角三角形のタグであり、 $a, b$ の選び方には制限がありません。これで直角三角形も無限にあることが納得できます。冒頭の問題提起の意味も少し分かってきたぞ、と思われませんか。

なお、原文では全ての直角三角形の集合を  $R$  (“Right triangle”) とおき、赤いタグの集まりを  $E$  (“等号”) とし、両者は同一視できる、と述べてあります。

$$T \simeq I = \{(a, b, c) \mid 0 < a \leq b \leq c < a + b\},$$

$$R \simeq E = \{(a, b, c) \mid 0 < a \leq b \leq c = \sqrt{a^2 + b^2}\}$$

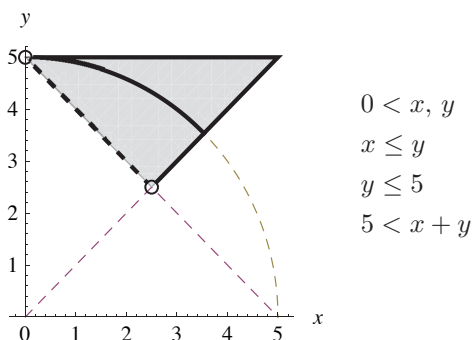
であることを再確認して、一挙に核心に迫りましょう。

● 三角形のタグの中に赤い印の正三角形のタグは「どれくらい」あるでしょうか？ 先生はタグの集合  $I$  と  $E$  を「視覚化する」ことによって比較しようとしています。

視覚化とは図に示すこと、ここではタグ  $(a, b, c)$  を3次元空間の1点と考えることです。これは専門家には常套手段ですが、「三角形を点に変える手品」のようで、健全な常識人には受け入れ難いものです。そこで座標に  $(x, y, z)$  という文字を使う習慣をバックに、3辺の長さ  $(a, b, c)$  を座標  $(x, y, z)$  と読み直すと言ってみましょう。でも視覚化のためにもう一段抽象度を高めたのです。

こうして、三角形のタグ全体  $I$  の姿は原文の図3において三角錐で示されます。その中に直角三角形のタグ全体  $E$  は原文図7で厚みのない膜(円錐面の一部)で描かれています。「次元」という用語を使うと  $I$  は3次元、 $E$  は2次元です。問Iへの解答は、三角形の集合  $I$  も直角三角形の集合  $E$  もともに無限集合だけれど、「次元が違うので  $E$  は非常に少ないということになる」となります。

● 全ての三角形を考えると無限に伸びる立体図形を思い描くことが必要ですが、一辺の長さ  $c$  を5に限定すると、有限の範囲にとどまる平面図形になるので見やすくなります。原文の図1と図4を合わせて再現してみました。



$c = 5$  の三角形はグレイの領域の各点と対応し、その中で直角三角形と対応する点は円弧上に限られますが、ともに無限にたくさんあります。円弧は点の集合としてグ

レイ領域の一部であって、両者は面(2次元)と線(1次元)の違いがあります。この断面図でも直角三角形の相対的な少なさは、次元の違いで説明できます。

さらにこの図から、グレイ領域から均等に選んだ点が円弧の上に来ることは減多に起こらないこともよく分かります。確率を面積の比率で定義すれば、太さのない線の面積はゼロですから、くじで直角三角形を引き当てる確率もゼロということになります。このことは  $c$  の値によりません。これが 問IIへの解答 です。

● 2つの問は解決しましたが、先生の論述はあと少し続きます。ある意味で上記の解答を覆すかのような観点が持ち出されます。論点は、

- (1) 無限を数えるとき次元の違いは意味をもたないこと(問Iと関連する),
- (2) 確率ゼロは「絶対に起こらない」ことを意味しないこと(問IIと関連する),

の2点です。

先に(2)についての説明があります。ロシアの数学者コルモゴロフ(1903–1987)が登場し、無限個の要素事象がある場合、面積や体積の比による確率の定義を合理的と認める理論が紹介されます。そして、『確率ゼロが「決して起こらない」ということを意味しているわけではないと理解するしかありません』と書かれます。

例えば、3辺がすべて長さ5の正三角形は確かに1つ存在して、三角形の詰まった袋に入っています。この正三角形は先ほどの図では右上の1点(5,5)に対応します。点は0次元ですから、この正三角形を引く確率は直角三角形よりも遥かに小さいと思われませんが、ともに確率ゼロでその区別はできません。

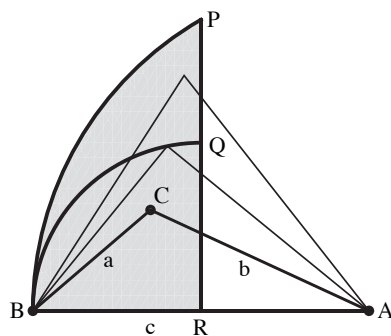
(1)についてはドイツの数学者カントール(1845–1918)による「驚くべき定理」が紹介されます。「2つの集合の濃度(要素の個数の一般化)は、両者の間に1対1対応が存在するとき同じとする」という定義より、「無限集合の濃度は次元によらない」ことが導けるのです。この論法に従うと、 $I$  は3次元、 $E$  は2次元ですが濃度は同じ、つまり、全ての三角形とその一部にすぎない全ての直角三角形が“同数”になります。健全な常識人の直感は「そんな馬鹿な!」と受け入れを拒むでしょう。

この数学的考察は、要素の多少と確率の大小とは対応しないという結論を引き出します。そして、表題の「直角三角形はどれくらいあるの?」という問答は、確率的にはゼロ、個数としては全ての三角形と同数、という“悩ましくも挑戦的”な状態で幕を閉じます。

## 4 蛇足的あとがき

青木先生の2つの作品を「なかなか面白そうだ」と思っていただけでしょうか。振り返ると、「アルゴリズムを考えるのは楽しい頭の体操だ」「無限と向き合うときは理性を信じて直感を疑え」と仰ったように思いました。

●前のページの図に戻りますが、集合  $I$  や  $E$  を視覚化するために、三角形のタグ  $(a, b, c)$  を座標  $(x, y, z)$  と同一視する飛躍がありました。以下では、 $(a, b, c)$  をその意味のまま視覚化する私の試みを紹介させていただきます。



上の図で、タグ  $(a, b, c)$  は実際に三角形  $ABC$  の3辺の長さです。だから三角形の構成条件のチェックは不要です。PR は線分  $AB$  の垂直二等分線、 $\widehat{BP}$  は  $A$  を中心とする円弧、 $\widehat{BQ}$  は  $R$  を中心とする円弧です。辺の長さは  $BC \leq CA \leq AB$  の順ですから、点  $C$  は円弧  $\widehat{BP}$  の内側、線分  $PR$  の左側、線分  $BR$  の上側に位置しなくてはなりません。この領域をグレイで塗り、記号  $[PBR]$  で表しましょう。 $a > 0$  ですから境界  $BR$  は除きますが、境界  $\widehat{BP}$  と  $PR$  は領域  $[PBR]$  に含まれます。

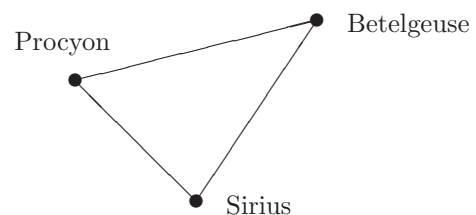
長さ  $c$  と2点  $A, B$  の位置を固定して、点  $C$  の位置を領域  $[PBR]$  の中に選ぶと、三角形  $ABC$  が決まります。この意味で  $[PBR]$  の点  $C$  と三角形  $ABC$  が1対1に対応します。この図は直接的で分かりやすいと思います。

さて、 $AB$  を斜辺とする直角三角形の頂点  $C$  は円弧  $\widehat{BQ}$  の上に限定されます。したがって、全三角形と全直角三角形の関係は領域  $[PBR]$  と円弧  $\widehat{BQ}$  の関係になり、曲線上にある後者が圧倒的に少ないことが視覚的に分かります。なお、点  $P$  は正三角形、点  $Q$  は直角二等辺三角形に対応します。領域  $[PBR]$  の面積は  $(\pi/6 - \sqrt{3}/4)c^2$ 、円弧  $\widehat{BQ}$  の長さは  $\pi c/4$  です ( $c$  の次数が次元を表す)。

●最後に、自分勝手な連想を加えます。原文には、三角形の3頂点は特定の平面上に限らず、3次元空間内の3点でも基本的な考え方は変わらない、と書かれています([1] 3.2節の注)。そのことから、空想が膨らみます。

偉大なドイツの数学者ガウス(1777-1855)は、地上の大きな三角形(ブロッケン山など3つの山頂を結ぶ)を相手に、その三角形の内角の和を測定して  $180^\circ$  と比較することを試みました。空間の歪みを測ろうとしたのです。当時の測定精度が十分でなかったので残念ながら何の結論も得られなかったそうです。

広大な宇宙に目を転じましょう。冬の大三角形と言えば、おおいぬ座のシリウス、こいぬ座のプロキオン、オリオン座のベテルギウスの3つの星を結ぶ夜空の三角形です。この三角形は直角三角形でしょうか?



空間にあるので3つの星が決める平面は地球からは傾いて見えますから、見かけでは何とも結論できません。

- この三角形を「コンピュータに与える」ことができるでしょうか?
- 3頂点の座標は分かるでしょうか?
- 3辺の長さは分かるでしょうか?
- もし分かったとして、青木アルゴリズムで直角三角形かどうかを判定できるでしょうか?
- 宇宙が歪んでいるとしたらどうなるでしょうか?

青木先生の論文はこのように連想が広がって行く素晴らしいさをもっています。

面白い論文をどうもありがとうございました。

皆さんにはぜひ一読されることをお勧めします。  
(学部の論集は本学図書館に収納されています。)

## 参考文献

- [1] 青木憲二、「直角三角形をコンピュータに教えるには?」、専修ネットワーク&インフォメーション、No.8, 12月, 2005.
- [2] 青木憲二、「三角形の中で直角三角形はどのくらいあるの?」、専修ネットワーク&インフォメーション、No.9, 3月, 2006.