Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 48, No. 1, 71-94, 2013

不確実性下における学習曲線と生産決定*

中島　　巌**

＜要約＞

作業時間ないし作業回数の増加が労働力の生産性の向上を促がす傾向は，第２次大戦前から一部の産業において観察されていた。時間ないし累積産出量で測った作業経験の増加が費用の低減化をもたらす学習効果が働くからであるとみなされ，かかる現象ないし過程は経験による学習（learning-by-doing）と呼称されるに至った。経験差に由来する費用上の優位性は，新規参入との間に費用の非対称性を築き，それが参入障壁として作用するとする議論がそれに続いた。ならば，競争的環境において経験による学習はいかなる効果をもたらし得るか，という問い掛けが意味をもってくる。

動的な時間設定の下で，当期の生産実行は，一方で即時的な利潤の拡大化をもたらし得る効果と，もう一方で累積産出量の増加を通じた将来費用の低減化をもたらし得る効果との二面の効果をもたらし得る。このとき，学習は埋没費用をともなう一種の投資行為であるとみなすことも可能となる。

任意時点の生産費用が累積産出量の減少函数となるところで，両者の関係は学習曲線（learning curve）を導く。以下では，学習曲線に直面する競争企業の生産決定のあり方が動的計画法の適用によって検討される。

まず，累積産出量が企業価値にもたらす限界的効果を累積産出量の陰の価値と特定すれば，生産が実行されるときの陰の価値が生産物価格に依存し，その価格の上昇には陰の価値の上昇が対応することが確定的経済環境の下で確かめられる。

次に，生産物価格あるいは限界費用がそれぞれの確率過程にしたがう確率変数となるとき，生産が実行されるところで限界費用が陰の価値分だけ限界収入を上回る点で生産水準が選択されるが，陰の価値は，生産物価格の上昇には上昇し，限界費用の上昇には低下すべく対応する。

さらに，生産物価格と限界費用が同時に確率変数として作動するとき，累積産出量がもはや学習効果を生まない程の高水準にあるところで，企業価値は生産物価格と限界費用のみに依存する。このとき，１次同次性がしたがうならば，生産を実行する領域と生産を先送し待機する領域を分割する臨界的価格－限界費用比率が導かれる。このとき，両確率変

＊　‘learning　curve’は，より限定的な文脈において「習熟曲線」として通っているごとくであるが，文脈を異にする本稿においては「学習曲線」と呼んでおく。

＊＊　専修大学名誉教授

数の共分散の上昇には価格－限界費用比率の不確実性の低下が対応し，むしろ生産を実行する誘因が上昇する。

JEL 区分：D03，O30，O33
キーワード：学習曲線，価格不確実性，費用不確実性

序

1920年代に，Wright-Patterson 米軍空軍基地の司令官が，航空機体の組立てに要する直接的労働時間数が組立ての全作業回数の増加とともに減少していくという指摘を行なった。その後も，半導体（semi-conductor）と電算機（computer）の製造業において同様の現象が観察されることになった。

Arrow〔２〕は，かかる現象に対して理論的分析を試みた嚆矢となった。そこでは，係わる生産過程に習熟した後の投入労働力の生産性が顕著な上昇傾向を見せることから経験（experience）はれっきとした生産要素の１つを構成すると説かれた。かかる過程は，経験による学習（learning-by-doing）と呼ばれ，Scherer〔16〕は，これを異時点間の規模に関する収穫逓増性（dynamic increasing returns to scale）の一形態であると位置づけた。

資本移動の阻止を狙いとする独占企業体の戦略的行動（strategic behavior）が，需要面では，買手のブランド志向を促がす広告の形をとり，供給面では，経験差による費用差の拡大化の形をとるものとすると，独占体はかかる費用優位性を新規参入に対する障壁として利用する戦略的誘因をもち得る。（学習（learning）をともなう繰返しゲームの文脈での同様の参入阻止への戦略的誘因の存在可能性について，Mookherjee＝Ray〔14〕参照。）

しかるに，上の参入阻止への誘因は，経験益が私的財（private good）であり，他の産業参加者への拡散は起こらないという前提が置かれて初めて意味をもつ。Lieberman〔10〕は，学習の拡散は，一般によく見られる現象であるとする。このとき，経験益は，公共財（public good）ないし共有財産（common property）を成すことになる。（学習をともなうモデルにおける経験益の溢出（spill-over）がもたらす効果について，Spence〔18〕，Kreps＝Spence〔９〕参照。）

しかしながら，それ以前からの累積産出量と単位費用との間の関係，すなわち学習曲線（learning curve）の存否をめぐる議論が，古く1936年に Wright〔19〕によって，また，第２次大戦後しばらくして Hirsch〔７〕によって展開されていた。そこでは，航空機体や工作機械の生産に際して累積産出量とともに費用低下が生ずることが主張された。その後も，学習曲線の存在性を裏づける作業が，Alchian〔１〕, Rapping〔15〕, Baloff〔３〕，さらに下って Lieberman, *op. cit.*,によって展開されていった。

さらに，Spence〔17〕，Kalish〔８〕は，それぞれ競争企業，独占企業について，学習曲線の存在がもたらす効果を検討し，学習曲線が存在する場合の方が産出量は増加し，限界費用が限界収入を上回る点にまで生産が促されることを主張した。（戦略的行動にとっての学習曲線の意義について，Fudenberg＝Tirole〔６〕，学習効果の溢出による外部性について，Zimmerman〔20〕参照。）

また Majd＝Pindyck〔11〕は，生産物価格が不確実性に支配され確率過程にしたがって変動する

ところでの学習曲線の意義を条件付請求権（contingent claims）の評価づけの問題の文脈の中で検討した。（因みに，McDonald＝Siegel〔13〕は，学習曲線の存在を想定しない文脈で，確率的生産物価格に直面する企業が，すべての時点での将来生産に対するコール･オプション（call options）の組を保有する主体とみなし得る可能性を示した。そこでは，各コール･オプションは，生産費用に等しい行使価格をもち，生産物価格に等しい利得支払いをもち，したがって，企業価値が条件付請求権となる。）

我々の本稿の目的は，確率過程にしたがう不確実性が支配する情況の下で，累積産出量とともに生産費用が低下する学習曲線に直面する企業の生産決定のあり方をみることにある。

次節では，予備的考察として，不確実性が存在しないところでの学習曲線に直面する企業の生産決定のあり方をみる。第２節では，生産物価格が確率過程にしたがって変動するところでの学習曲線に直面する企業の生産決定のあり方をみる。第３節では，加えて限界費用が確率過程したがうところでの学習曲線に直面する企業の生産決定のあり方をみる。いずれの場合も，動的計画法（dynamic programming）の適用がなされる。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第１節　学習曲線

本節では，不確実性が作用しない確定的経済における企業の生産計画に学習過程がもたらす効果を概観する。[1)]

1936年に Wright〔19〕，1952年に Hirsch〔７〕が，航空機体，工作機械の生産に際して累積産出量の増加につれて生産費用が低下していく事実を提示して以来，広範囲の産業部門において学習曲線（learning curve）が存在する可能性を示唆する多様な研究作業が展開されてきた。

近年に，Spence〔17〕，Kalish〔８〕は，企業の（生産物価格と産出量）の設定に際して学習曲線の存在がもたらす効果を検討した。学習効果が作用するところで，そうでない場合よりも企業の産出量が割増される情況，すなわち，限界費用が限界収入を上回る水準まで生産が継続されるそれが指摘された。現在の産出量の１単位の増分が学習曲線を下方にシフトさせることによって将来の生産費用を減少させ，したがって，部分的にその費用を相殺する陰の価値（shadow value）をもってくる，すなわち，現在の生産が上の陰の価値の分だけ限界費用が限界収入を上回るものとなるからであると理由づけられた。

しかるに，上の議論は，陰の価値の算定が難しいばかりか，生産物の将来需要に関わる不確実性が考慮の外に置かれているという限界を有する。例えば，消費者の所得，嗜好，さらに他の競争企業群の価格決定に関する予測不能性，また，自製品を突然の陳腐化に追いやるような新規の代替商品の登場の可能性に関する予測不能性に起因する不確実性が企業にとって不可避であり，将来の生産決定は需要の展開に条件付きのそれとなる。かかる情況の下では，累積産出量の当期の陰の価値の算定は複雑を極め，したがって，生産計画にとっての学習効果の重要性そのものが低下していくことになる。

以下では，不確実性が作用するところでの確率的な学習曲線の効果が見込まれる情況下での生産

決定のあり方との対比のために，不確実性が作用しない確定的な学習曲線の効果が見込まれる情況下でのそれのあり方をみておく。

さて，単一生産工程をもち，その生産物を価格 P で競争市場で販売する競争企業を想定しよう。

いま，時点 t における企業の産出量が $x(t)$ であるとき累積産出量 $Q(t)$ は

$$Q(t)=\int_0^{\infty}x(\tau)d\tau \tag{1}$$

で与えられるものとする。このとき，$dQ(t)/dt=x$ となる，すなわち，累積産出量の変化率が瞬時的産出量となる。企業の当期生産決定が将来のそれに影響を与える，すなわち，任意の時点における生産費用が累積産出実績量の減少函数となり，したがって，当期の産出量がすべての将来生産費用の低減化に寄与する右下りの学習曲線に直面するものとする。このとき，当期の生産は，一方で即時的利潤をもたらし，他方で将来費用の低減化をもたらすという二面の効果を生むことになる。

さて，産出率に関しては，限界費用は 1 に設定される生産能力の上限に至るまで一定であり続けるものとする。他方，学習曲線に直面するところでの限界費用は最低水準 $\underline{c}$ に至るまで累積産出量とともに減少していく，すなわち

$$C(Q)=\begin{cases}c_0e^{-\gamma Q} & \text{if } Q<Q_m\\ c_0e^{-\gamma Q_m}=\underline{c} & \text{if } Q\geq Q_m\end{cases} \tag{2}$$

で表されるものとする。ただし，c_0 は初期限界費用で，Q_m は学習効果が尽きる産出量，そして $\underline{c}$ は一定の最低水準限界費用を表わす。（**図-1-(a)**参照。）このとき，c_0,γ は学習曲線の形状を特定化するパラメータであり，より大きな c_0,γ に対しては，より急勾配の学習曲線が対応する。（**図-1-(b)**参照。）複数個の相異なる生産技術に直面する企業は，対応する学習曲線間の選択の問題に直面することになる。

ここで，生産物価格 P は確定値をとり，時間とともに既知の一定率 α で成長していく，すなわち

$$P(t)=P_0e^{\alpha t} \tag{3}$$

がしたがうものとする。ただし，P_0 は初期価格である。

いま，企業は，生産能力制約 $0\leq x\leq 1$ の下で，利潤の流列の割引現在価値を最大にすべく産出率の選択を図るものとすると，企業の問題は

$$\max_{x(t)} V=\int_0^{\infty}[P(t)-C(Q)]x(t)e^{-rt}dt \tag{4}$$

$$s.t.\quad \frac{dQ(t)}{dt}=x(t)$$

$$Q(0)=0$$

$$P(t)=P_0e^{\alpha t}$$

で表わされる。ただし，r は不確実性が存在しない情況に妥当する安全割引率（risk-free discount

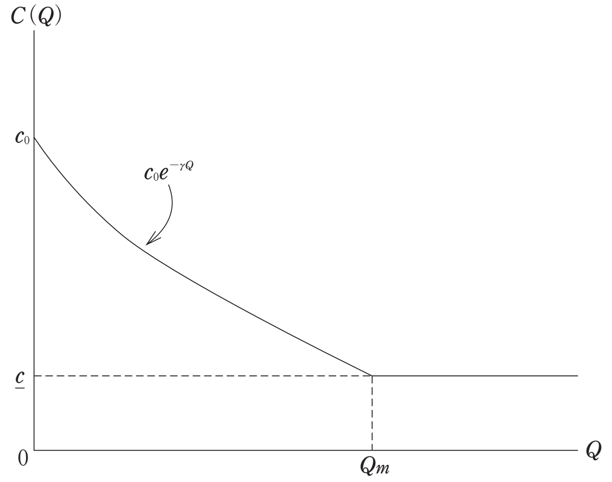
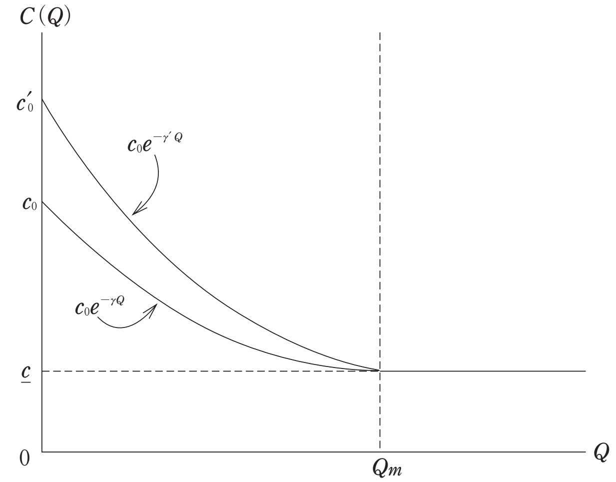


図-1-(a)



〈N.B〉 $c_0' > c_0$
$\gamma' > \gamma$

図-1-(b)

rate）である。以下で，上の問題に動的計画法（dynamic programming）を適用してみよう。

さて，企業の生産決定が，当期の観察値に基づいて下される即時的選択とそれ以降の時点全体にわたる後続的選択とに分離可能であるものとする。このとき，それぞれの選択決定からしたがう即時的価値（immediate value）と後続的価値（continuation value）の和は企業の価値を表わし，さらに，状態変数の生産物価格と累積産出量に対して状態評価函数（value function）$V(P, Q)$が定義される。分離可能性の想定の下で，時点 t において状態評価函数は

$$V_t(P(t), Q(t)) = \max_{x(t)}\{[P(t) - C(Q)]x(t) + \frac{1}{1+r}V_{t+1}(P(t+1), Q(t+1))\} \tag{5}$$

で表わされる。

ところで，時間視野が無限大に及ぶとき，問題は遷移構造（recursive structures）をもつことになり，$P(t), P(t+1)$をそれぞれP, P'，さらに，$Q(t), Q(t+1)$をそれぞれQ, Q'で表わすことができることを考慮すれば，(5)式は，

$$V(P, Q) = \max_x \{[P - C(Q)]x + \frac{1}{1+r} V(P', Q')\} \tag{6}$$

と表現し直される。

ここで，各期間の時間間隔をΔtとし，$\Delta t \to 0$とすれば時間は連続的なそれとなり，間隔Δtにまたがる利潤は$\pi^*(P, Q, x, t)\Delta t = [P - C(Q)]x\Delta t$で与えられ，割引率値は$r\Delta t$で与えられる。このとき，(6)式は，

$$V(P, Q, t) = \max_x \{\pi^*(P, Q, x, t)\Delta t + \frac{1}{1+r\Delta t} V(P', Q', t+\Delta t)\} \tag{7}$$

と表現し直される。いま，(7)式の両辺に$1+r\Delta t$を乗じ，整理すれば

$$r\Delta t + V(P, Q, t) = \max_x \{\pi^*(P, Q, x, t)\Delta t(1+r\Delta t) + V(P', Q', t+\Delta t)\} \tag{8}$$

がしたがう。ここで，(8)式の両辺をΔtで除し，$\Delta t \to 0$とすれば，(8)式は

$$rV(P, Q, t) = \max_x \{\pi^*(P, Q, x, t) + \frac{dV}{dt}\} \tag{9}$$

と変形される。ただし，dVは$\Delta V = V(P', Q', t+\Delta t) - V(P, Q, t)$の極限値である。ここで，$dV$を展開し，$dV = V_P dP + V_Q dQ$と近似すれば，(9)式の右辺は，$\max_x \{[P - C(Q)]x + V_P \frac{dP}{dt} + V_Q \frac{dQ}{dt}\}$と表わされる。いま，最大化を実行し，$dQ/dt = x$を想起すれば，１階条件

$$P - C(Q) + V_Q = 0 \tag{10}$$

がしたがう。しかるに，(10)式は，産出率xに関して線型（linear）であるから，最適産出率は1か0である。さらに，学習曲線から限界費用はQとともに減少していくことを想起すれば，最適産出率$x^*(P, Q)$は

$$x^*(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{if } P + V_Q \geq C(0) = c_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

と表わされる。

ところで，まず，生産物価格が時間を通じて一定，すなわち$\alpha = 0$がしたがうものとしよう。このとき，生産活動は，当期から永久に継続されるか，あるいは全く実行されないかのどちらかとなる。したがって，(4)式の積分がそのまま算定可能となり

$$V(Q) = \begin{cases} \frac{P}{r} - \frac{c_0 e^{-\gamma Q}}{r(\gamma + r)} \left[r + \gamma e^{-(\gamma+r)(Q_m - Q)} \right] & \text{if } P \geq c_0 - V_Q, \quad Q \leq Q_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{12}$$

を得る。

さらに，(12)式から，累積産出量の追加的１単位当たりの影の価値 V_Q が算定される。

まず，$Q \leq Q_m$，$P \geq c_0 - V_Q$ がしたがい，生産が継続され続けるとき，影の価値は

$$V_Q = \frac{\gamma c_0}{\gamma + r} e^{-\gamma Q} \left[1 - e^{-(\gamma + r)(Q_m - Q)} \right] \tag{13}$$

で表わされる。次に，$Q > Q_m, P < c_0 - V_Q$ がしたがい，生産が実行されず $Q = 0$ がしたがうとき，影の価値は

$$V_Q(0) = \frac{\gamma c_0}{\gamma + r} \left[1 - e^{-(\gamma + r) Q_m} \right] \tag{14}$$

で表わされる。しかるに，(14)式の右辺より $c_0 - P$ が大きいとき，企業は生産を実行しないから $V_Q = 0$ となる。生産を実行しているとき，V_Q は生産物価格から独立となる。また，V は P に依存するが，V_Q は当期生産がもたらす将来的な費用節約分を反映するにすぎない。企業は永久に生産を継続するから，上の費用節約分は生産物価格から独立となる。さらに，もし，安全割引率 $r = 0$ がしたがうとき，(2)式を想起すれば，

$$V_Q = c_0 (1 - e^{-\gamma Q_m}) = c_0 - \underline{c} \tag{15}$$

がしたがい，生産物価格が限界費用の下限値 $\underline{c}$ と少なくとも同一の値をとるならば，企業は生産を実行を生産すべきであることが示唆される。[2)]

次に，生産物価格成長率 $\alpha > 0$ の場合を想定しよう。もし，価格が十分大きければ，企業は直ちに生産を実行し，永久に継続する。陰の価値 V_Q は上の(14)式で与えられ，価格と独立となる。生産が実行に移される臨界価格は，上の $\alpha = 0$ の場合と同様に，限界費用の下限値 $\underline{c}$ に等しいそれとなる。

もし，初期価格が臨界価格より低いとき，企業は $P(T) = c_0 - V_Q$ が満たされる時点 T まで生産開始を先送りすることになり，(12)式の積分値の下限が T となる。$t = 0$，$Q = 0$ において，V_Q は

$$V_Q(0) = \frac{\gamma c_0 e^{-rT}}{\gamma + r} \left[1 - e^{-(\gamma + r) Q_m} \right] \tag{16}$$

で与えられる。P の初期値が小さければ小さい程 T は大きくなり，

$$P_0 e^{\alpha T} = c_0 - V_Q e^{rT} \tag{17}$$

と設定すれば，$P_0 < c_0 - c_0 \gamma [1 - e^{-(\gamma + r) Q_m}] / (\gamma + r)$ がしたがうとき，時点 T は

$$T(P_0) = \frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{c_0}{P_0} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\gamma + r} \left[1 - e^{-(\gamma + r) Q_m} \right] \right\} \right] \tag{18}$$

で与えられ，さもなければ $T = 0$ となる。ここで，(18)式を(16)式に代入し，T を消去すれば，V_Q と P の依存関係が確かめられる。**図-2**において[3)]，$\alpha = 0$ のとき，$V_Q(P)$ は P と独立となり，$P^* = c_0 - V_Q$ を満たす臨界価格 P^* がしたがう。$\alpha > 0$ に対して，原点を起点とし，$V_Q(P) = c_0 - P$ を満たす

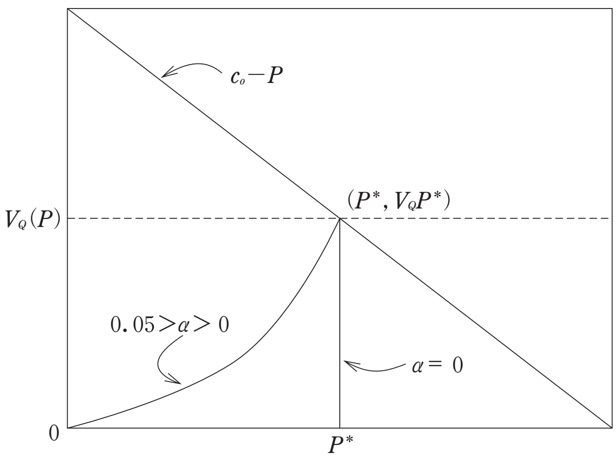


図-2

座標$(P^*, V_Q(P^*))$を終点とする右上りの曲線が妥当する。

1）本節の議論について，例えば，Spence〔17〕，Majd＝Pindyck〔11〕参照。
2）かかる帰結は，Spence〔17〕におけるそれに対応する。
3）異なるαの値に対する場合について，Majd＝Pindyck, *op. cit.*,（Figure 1）参照。

第2節　価格不確実性

本節では，学習曲線に直面する企業の生産物価格が不確実性に支配されるところでの生産決定のあり方をみる。[4)]

学習曲線に直面する企業の当期の生産費用は，将来の生産費用の低減化という利得をもたらす投資，さらに言えば非可逆的投資（irreversible investment）の側面を帯びてくる。企業が，自ら下した生産決定を悔いても，生産停止も費用の回収も不可能であるからである。さらに，企業の生産物価格が不確定であれば，かかる投資からの将来利得も不確定なそれとなる。

さて，企業の生産物価格が確率過程にしたがって変動するものとする。このとき，企業は，もし，価格が極めて低ければ生産を停止し，後々価格の回復を待って生産を再開し得ることを了解した上で，瞬時瞬時に価格を観察し生産を実行するか否かを決定しなければならない。

いま，学習曲線に直面するところで，再び，当期産出率$x(t)$に対し累積産出量$Q(t)$が

$$Q(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau \tag{19}$$

で与えられ，さらに，限界費用は，累積産出量Qに対し

$$C(Q)=\begin{cases} c_0 e^{-\gamma Q} & \text{if } Q<Qm \\ c_0 e^{-\gamma Q_m}=\underline{c} & \text{if } Q\geq Qm \end{cases} \tag{20}$$

で表わされるものとする。

ここで，生産物価格は，$P(t)=P_0e^{\alpha t}$ に代わって，確率過程

$$\frac{dP}{P}=\alpha dt+\sigma dz \tag{21}$$

にしたがって変動するものとする。ただし，α は P の期待成長率，σ は標準偏差であり，dz は Wiener 過程の増分である。(21)式は，P の当期水準は既知であるが，将来水準は時間とともに線型的に増大する分散をもつ対数正規分布（lognormal distribution）にしたがうことを意味している。

ところで，もし，生産物価格 P が既存の市場取引可能な資産の組合せでスパン(span)されるならば，すなわち，条件付請求権（contingent claims）が取引され得る十分に完備（complete）な資本市場が存在し，資産価格の変化につれて資産保有者のポートフォリオが連続的に調整可能であり，また，その資産価格が不確実性と完全相関する関係に立つとすれば，資産価格の変化ないし新資産の価格を既存のそれで再現が可能となる。すなわち，同一の収益，危険性をもつポートフォリオを複製（replicate）することが可能となる。しかるに，本節の以下では，かかる市場が存在しないものとする。このとき，動的計画法の適用が示唆される。

さて，前節におけると同様に，2つの状態変数 P, Q，1つの制御変数 $x(0\leq x\leq 1)$ に対し，企業価値 $V(P, Q)$ を

$$V=\int_0^\infty [P(t)-C(Q)]x(t)e^{-\rho t} \tag{22}$$

で定義すれば，問題は，当期の企業の市場価値を最大化する生産ルール $x^*(P, Q)$ にしたがう企業価値 $V(P, Q)$ の経路を見つけることになる。ただし，不確実性が支配するところで，割引率はリスク調整済割引率 ρ が適用される。問題は，$0\leq x\leq 1$ の制約の下で

$$V(P, Q)=\max_{x(t)}\{[P(t)-C(Q)]x(t)e^{-\rho t}dt\} \tag{23}$$

で表わされる。

再び，企業の生産決定が当期 t の観察値に基づく即時的選択とそれ以降の時点全体にわたる後続的選択とに分割可能であるとすれば，動的計画法が適用可能となる。

ここで，当期の最適決定に基づく変動利潤函数（variable profit function）

$$\begin{aligned}\pi^*(P) &\equiv \max_{x(t)}[P(t)-C(Q)]x(t) \\ &=[P(t)-C(Q)]x^*(t)=\pi^*(P(t), Q)\end{aligned} \tag{24}$$

を定義すれば，それは，決定の即時的価値を与え，後継的価値との和は企業価値を表わし，確率過程にしたがう価格に対して定義される状態評価函数 $V_t(P(t))$

$$V_t(P(t))=\max_{x(t)}\left[\pi^*(P(t), Q, x)+\frac{1}{1+\rho}E_t[\mathrm{V}_{t+1}(P(t+1))]\right] \tag{25}$$

がしたがう。ただし，E_t は，

$$E_t[V_{t+1}(P(t+1))]=\int V_{t+1}(P(t+1)d\Phi_t(P(t+1))\mid P(t),Q(t),x(t)) \tag{26}$$

で定義される条件付期待値オペレータであり，Φ_t は，$P(t), x(t)$ が来期以降の価格の確率分布に影響を与えるところでの $P(t), x(t)$ に条件付きの $P(t+1)$ の確率分布である。上の(25)式の表現は，動的計画法における Bellman 方程式（Bellman equation）に相当する。しかるに，時間視野が無限大に及ぶところで問題は遷移構造をもち，$P(t), P(t+1)$ は，それぞれ P, P' で表わされ，Bellman 方程式は，

$$V(P)=\max_x\{\pi^*(P,Q,x)+\frac{1}{1+\rho}E[V(P')\mid P,Q,x]\} \tag{26}$$

と書き改められる。

ここで，各期間の時間間隔を $\varDelta t$ とし，$\varDelta t\to 0$ とすれば，時間は連続的なそれとなり，間隔 $\varDelta t$ にまたがる利潤は $\pi^*(P,Q,x)\varDelta t$ で与えられ，割引率は $\rho\varDelta t$ で与えられ，Bellman 方程式は

$$V(P,Q,t)=\max_x\{\pi^*(P,Q,x,t)\varDelta t+\frac{1}{1+\rho\varDelta t}E[V(P',Q',t+\varDelta t)\mid P,Q,x]\} \tag{27}$$

と表現し直される。いま，(27)式の両辺に $1+\rho\varDelta t$ を乗じ整理すれば

$$\begin{aligned}\rho\varDelta tV(P,Q,t)&=\max_x\{\pi^*(P,Q,x,t)\varDelta t(1+\rho\varDelta t)\\&\qquad+E[V(P',Q',t+\varDelta t)-V(P,Q,t)]\}\\&=\max_x\pi^*(P,Q,x,t)\varDelta t(1+\rho\varDelta t)+E[\varDelta V]\}\end{aligned} \tag{28}$$

がしたがう。ここで，(28)式の両辺を $\varDelta t$ で除し，$\varDelta t\to 0$ とすれば，(28)式は

$$\rho V(P,Q,t)=\max_x\{\pi^*(P,Q,x,t)+\frac{1}{dt}E[dV]\} \tag{29}$$

と変形される。(29)式の右辺の $(1/dt)E[dV]$ は $E[\varDelta V]/\varDelta t$ の極限値であり，

$$L_y[V(P,Q,t)]=\frac{1}{dt}E[dV] \tag{30}$$

と設定すれば，左辺は，微分生成作用素（differential generator）となる。

すでに示唆したごとく，企業の最適生産戦略は，企業の当期市場価値を最大化するそれである。しかるに，調整費用はなく，生産水準の変更にともなう追加費用もないものとすれば，最適生産ルールは，前節の確定的モデルのそれと同様の特質をもつことになる。すなわち，生産物市場価格がある臨界価格 $P^*(Q)$ を下回るか上回るかに応じて瞬時的産出率が 0 か 1 かのどちらかの値をとることになる。

ここで，価値の増分 dV を展開し，伊藤補題（Ito’s lemma）を適用すれば

$$dV = V_P dP + V_Q dQ + \frac{1}{2}V_{PP}(dP)^2$$

$$= V_P(\alpha Pdt + \sigma Pdz) + V_Q dQ + \frac{1}{2}V_{PP}(\alpha Pdt + \sigma Pdz)^2 \tag{31}$$

を得る。両辺の期待値をとり，$E[dz]=0, (dz)^2=dt$
を想起すれば，(31)式は

$$E[dV] = [\alpha PV_P + \frac{1}{2}V_{PP}\alpha\sigma^2 P^2]dt + V_Q dQ \tag{32}$$

と変形される。

しかるに，将来産出率に対するリスク調整後の割引率 ρ に対し，生産物価格の期待成長率 α は，一般に，より内輪の値をとる，すなわち，パラメータ $\delta>0$ に対し，$\rho=\alpha+\delta$ が妥当する。もし，生産物が石油，銅といった備蓄可能な商品であるならば，δ は備蓄からの純限界利便利益（net marginal convenience yield)，すなわち，備蓄量 1 単位が追加的にもたらす便益のフローに相当する。また，生産物をポートフォリオを構成する資産とみなせば，δ は配当（dividend）の類に相当する。実際は，δ は備蓄総量などの市場規模の変数値に応じて確率的変動を示し得るが，ここでは，通例にしたがって外生的に設置されたパラメータであるものとする。

さて，(32)式を上の(29)式に代入すれば

$$\rho V(P, Q, t) = \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} + \alpha PV_P + \frac{dQ}{dt}V_Q + [P - C(Q)]x \tag{33}$$

を得る。しかるに，$dQ/dt=x, \alpha=\rho-\delta$ を想起すれば，(33)式は，さらに

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} + (\rho-\delta)PV_P + xV_Q - \rho V + [P - C(Q)]x = 0 \tag{34}$$

と変形される

ところで，(34)式は，産出率 x に関して線型であり，したがって，最適生産戦略の下で，x は 0 か，もしくは 1 のいずれかの値をとることに留意すれば，(34)式は，さらに，臨界価格 P^* に対し

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} + (\rho-\delta)PV_P + V_Q - \rho V + [P - C(Q)] = 0 \qquad \text{if } P \geq P^* \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} + (\rho-\delta)PV_P - \rho V = 0 \qquad \text{if } P < P^* \tag{36}$$

と書き改められる。

しかるに，(35), (36)式は，次の境界条件

$$V(0, Q, t) = 0 \tag{37}$$

$$\lim_{P\to\infty} V_P(P, Q, t) = \frac{1}{\delta} \tag{38}$$

$$P^*(Q)-C(Q)+V_Q=0 \tag{39}$$

$$V(P,Q_m,t)=\bar{V}(P,t) \tag{40}$$

を満たさなければならない。(37)式は，P がゼロとなり，常にゼロに留まり続けるならば，企業価値はゼロなることを意味する条件である。このとき，$V(0,Q,t)=0$ は吸収壁（absorbing barrier）を成す[5)]。(38)式は，価格が高騰していくにつれ，企業が殆んど常時生産を実行することになる事実からしたがう。このとき，金額1単位の価格上昇の価値増分は，永久に支払い続けられる期間当たりの金額1単位の割引現在価値に他ならない。すなわち，$\alpha-\rho=\delta$ を想起すれば，金額1単位の割引現在価値は

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-\rho t}dt=\frac{e^{(\alpha-\rho)t}}{\alpha-\rho}\bigg|_0^\infty=\frac{1}{\alpha-\rho}=\frac{1}{\delta} \tag{41}$$

で表わされ，(38)式の右辺に対応する。

(39)式は，自由境界条件（free boundary condition）である。この境界の上方では生産実行が最適となる。価格が限界費用から累積産出量の陰の価値を減じた値に等しいか，それを上回るとき常に生産を実行すべしとする最適生産のための1階条件からしたがう。最後に，(40)式は，等値化条件（value-matching condition）で，それ以上学習効果が作用せず生産費用が一定となる，すなわち $Q=Q_m$ に至るまで生産を継続したときの企業の価値を与える。Q が Q_m に等しいか，それ以上の水準においては，企業の価値は，専ら，価格のみに依存することになる。これを $\bar{V}(P,t)$ で表わそう。

ここで，$V(P,Q,t)$ に代わる $\bar{V}(P,t)$ に対し，企業は新たな生産決定問題に直面することになり，上と同様の手続きを適用すれば，$Q\geq Q_m$ のときの企業価値に対する常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2\bar{V}_{PP}+(\rho-\delta)P\bar{V}_P-\rho\bar{V}+[P-C(Q)]=0 \qquad \text{if } P\geq\underline{c} \tag{42}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2\bar{V}_{PP}+(\rho-\delta)P\bar{V}_P-\rho\bar{V}=0 \qquad \text{if } P<\underline{c} \tag{43}$$

がしたがう。ただし，上の境界条件(37), (38)，そして(39)式の制約にしたがわなければならないが，P^* に代わって $\underline{c}$ が適用される。

上の問題の特有性は，非同次部分，すなわち，投入函数（forcing function）$P-\underline{c}$ が，$P<\underline{c}$ と $P>\underline{c}$ のそれぞれの場合に別個に定義され，したがって，別個の解をもつことにある。このとき，$P=\underline{c}$ において2つの解が入れ替わる(switch)ことになる。

まず，$P\leq\underline{c}$ の領域をみてみる。生産が実行されないとき利潤部分 $P-\underline{c}=0$ となり，方程式の同次部分だけが残る。いま，同次部分に解 $\bar{V}(P)=KP^\beta$ を試みてみよう。代入を通じて2次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(\rho-\delta)\beta-\rho=0 \tag{44}$$

がしたがう。ただし，β は2次方程式の根で，1つは，1より大きい正根 $\beta_1(>1)$，もう1つは，

負根 $\beta_2(<0)$ となる。ただし，$\beta_1=\frac{1}{2}-(\rho-\delta)/\sigma^2+\sqrt{[(\rho-\delta)/\sigma^2-\frac{1}{2}]^2+2\rho/\sigma^2}>1$，$\beta_2=\frac{1}{2}-(\rho-\delta)/\sigma^2-\sqrt{[(\rho-\delta)/\sigma^2-\frac{1}{2}]^2+2\rho/\sigma^2}<0$ である。このとき，一般解は 2 根 β_1,β_2 に対応するベキ解の一次結合の形をとり

$$\bar{V}(P)=K_1P^{\beta_1}+K_2P^{\beta_2} \tag{45}$$

で表わされる。ただし，K_1,K_2 は未定係数である。しかるに，P が小さくなるにつれ遠い将来における場合以外，正の利潤が回復される可能性は乏しく，したがって，将来利潤の期待現在価値はゼロに向かう。しかしながら，$\beta_2<0$ であるから $P\to 0$ のとき $P^{\beta_2}\to\infty$ となるから，$K_2P^{\beta_2}$ において $K_2\to 0$ となる[6)]。したがって，一般解は

$$\bar{V}(P)=K_1P^{\beta_1} \tag{46}$$

で与えられる。

次に，$P>\underline{c}$ の領域をみてみる。一般解は，同次部分のベキ解の一次結合と特解の和の形をとる。代入を通じて特解 $P/\delta-\underline{c}/r$ を得る。すなわち，収入 (P) の期待値は α の率で成長するから，リスク調整後の割引率 ρ で割引くとき期待現在価値は $P/(\rho-\alpha)=P/\delta$ となり，他方，確定値の一定費用 $\underline{c}$ の流列は安全利子率 r で割引かれ，現在価値は $\underline{c}/r$ となる。したがって，純額たる利潤の現在価値は $P/\delta-\underline{c}/r$ で表わされる。上の特解に他ならない。一般解は，未定係数 B_1,B_2 に対して

$$\bar{V}(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{\underline{c}}{r} \tag{47}$$

で表わされる。しかるに，P が極めて大きな値をとるとき，遠い将来における場合以外生産を停止する可能性は乏しく投機的バブル（speculative bubble）に似た情況が現出する。かかる情況を排除するために，P の正のベキ β_1 を消去すべく $\beta_1=0$ と設定すれば，一般解

$$\bar{V}(P)=B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{\underline{c}}{r} \tag{48}$$

がしたがう。

以上の帰結は

$$\bar{V}(P)=\begin{cases} K_1P^{\beta_1} & \text{if } P<\underline{c} \quad (49)\\ B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{\underline{c}}{r} & \text{if } P\geq\underline{c} \quad (50)\end{cases}$$

と整理される

ところで，P の Brown 運動は，$P=\underline{c}$ の境界を自由に行き来し得るから，状態評価函数 $\bar{V}(P)$ は，境界にまたがって不連続に変化し得ない。したがって，$\bar{V}(P)$ は，$\underline{c}$ の近傍において連続的に微分可能でなければならない。ここで，上の(49)，(50)式の解の値と微係数を $\underline{c}$ において均等させれば

$$K_1\underline{c}^{\beta_1}=B_2\underline{c}^{\beta_2}+\underline{c}/\delta-\underline{c}/r \tag{51}$$

$$\beta_1 K_1 \underline{c}^{\beta_1-1}=\beta_2 B_2 \underline{c}^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta} \tag{52}$$

を得る。(51)式の条件は，等値化条件（value-matching condition），(52)式のそれは，平滑張合わせ条件（smooth-pasting condition）と呼ばれる。

ここで，(51)，(52)を連立させれば，未定係数 K_1, B_2は

$$K_1=\frac{\underline{c}^{1-\beta_1}}{\beta_1-\beta_2}\left(\frac{\beta_2}{r}-\frac{\beta_2-1}{\delta}\right) \tag{53}$$

$$B_2=\frac{\underline{c}^{1-\beta_2}}{\beta_1-\beta_2}\left(\frac{\beta_1}{r}-\frac{\beta_1-1}{\delta}\right) \tag{54}$$

で与えられる。

4）本節の議論における手続について，Majd＝Pindyck, *op, cit*.,に負う。
5）吸収壁（absorbing barrier）について，例えば，Malliaris＝Brock〔12〕（p. 199），Dixit＝Pindyck〔４〕（p. 162）参照。
6）吸収壁の排除を意味する。
7）これら２条件について，Dumas〔５〕参照。

第３節　費用不確実性

本節では，学習曲線に起因する費用低減効果に不確実性が作用するところでの企業の生産決定のあり方をみる。

前節では，生産物価格に不確実性が作用することによって企業の将来収入ないし利得が不確定になる場合が検討された。本節では，加えて(限界)費用に不確実性が作用するところでの企業の生産決定のあり方をみる。

一般に，企業の投資問題の多くの場合において，２通りの費用不確実性（cost uncertainty）が作用する可能性があり得る。１つは，技術的不確実性（technical uncertainty）である。例えば，種々の新規生産プラントの建設，新規航空路線の開発，新薬開発のごとき研究開発プロジェクト等においては，建設時間が長期にわたるとき，総費用はプロジェクトが完了して初めて確定し得るにすぎない場合も少なくない。かかる類いの不確実性がこれに相当する。

もう１つは，投入費用不確実性（input cost uncertainty）である。例えば，労働賃金，地代，原材料価格，さらには政府の規制条件の変更等の企業にとって外生的な要因の変化のために総費用を確定し得ない場合も少なくない。かかる類いの不確実性が，これに相当する。

しかるに，累積産出量がもたらす費用低減化の学習効果に関しては，前者の技術的不確実性が作用する可能性が妥当なそれであると考えられる。以下では，累積産出量から独立に作用する乗法的な不確実性を想定しよう。

さて，学習曲線に直面する企業の限界費用構造自体に変更を与えず乗法的に作用する限界費用係

数 ξ を想定する。このとき，限界費用は

$$\hat{C}(\xi,Q)=\xi C(Q)=\begin{cases}\xi c_0 e^{-\gamma Q} & \text{if } Q<Q_m\\ \xi c_0 e^{-\gamma Q_m}=\xi \underline{c} & \text{if } Q\geq Q_m\end{cases} \tag{51}$$

で与えられるものとする。このとき，限界費用係数 ξ は，幾何 Brown 運動

$$d\xi=\alpha_\xi \xi dt+\sigma_\xi \xi dz_\xi \tag{52}$$

にしたがって変動するものとする。生産物価格 P，限界費用係数 ξ，累積産出量 Q の 3 つの状態変数と産出率 x の 1 つの制御変数が想定される。

まず，生産物価格 P は確率変数とはならず，費用係数 ξ のみが確率変数となる情況を想定する。このとき，企業の市場価値 $F(P,\xi,Q)$ が

$$F=\int_0^\infty [P-\hat{C}(\xi,Q)]x(t)e^{-\rho t} \tag{53}$$

で定義されるものとする。企業の当期の問題は，その市場価値を最大化する生産ルール $x^*(P,\xi,Q)$ にしたがう $F(P,\xi,Q)$ の経路を見つけることにある。再び，当期の最適生産決定に対して定義される変動利潤函数

$$\begin{aligned}\pi^*(\hat{C})&\equiv\max_{x(t)}[P-\hat{C}(\xi,Q)]x(t)\\ &=[P-\hat{C}(\xi,Q)]x^*(t)=\pi^*(P,\xi,Q,x)\end{aligned} \tag{54}$$

を定義する。生産決定の即時的価値と後続的価値の和で企業価値を表わせば，確率過程にしたがう限界費用係数に対して状態評価函数 $F_t(\hat{C}(t))$

$$F_t(\hat{C}(t))=\max_{x(t)}[\pi^*(\hat{C}(t),P,Q,x)+\frac{1}{1+\rho}E_t[F_{t+1}(\hat{C}(t+1))] \tag{55}$$

がしたがう。ただし，E_t は，期待オペレータである。

しかるに，時間視野が無限大に及ぶところで遷移性が支配し，$\hat{C}(t)$, $\hat{C}\,(t+1)$ は，それぞれ $\hat{C}$, $\hat{C}'$ で表わされ，Bellman 方程式

$$F(\hat{C})=\max_x\{\pi^*(P,\xi,Q,x)+\frac{1}{1+\rho}E[F(\hat{C}')\mid P,\xi,Q,x]\} \tag{56}$$

がしたがう。ここで，各期間の時間間隔を Δt とし，前節と同様の手続きを適用すれば，Bellman 方程式は，

$$F(P,\xi,Q,t)=\max_x\{\pi^*(P,\xi,Q,x)\Delta t+\frac{1}{1+\rho\Delta t}E[F(P',\xi',Q',t+\Delta t)] \tag{57}$$

と表現し直される。いま，(57)式の両辺に $1+\rho\Delta t$ を乗じ整理すれば

$$\rho\Delta tF(P,\xi,Q,t)=\max_x\{\pi^*(P,\xi,Q,x)\Delta t(1+\rho\Delta t)$$

$$+E[F(P',\xi',Q',t+\Delta t)-F(P,\xi,Q,t)]\}$$

$$=\max_x\{\pi^*(P,\xi,Q,x)\Delta t(1+\rho\Delta t)+E[\Delta F]\} \tag{58}$$

を得る。ここで，(58)式の両辺を Δt で除し，$\Delta t\to 0$ とすれば，(58)式は

$$\rho F(P,\xi,Q,t)=\max_x\{\pi^*(P,\xi,Q,x,t)+\frac{1}{dt}E[dF]\} \tag{59}$$

と変形される。ただし，(59)式右辺の $E[dF]/dt$ は，$E[\Delta F]/\Delta t$ の極限値である。

さて，企業価値の増分を伊藤補題を適用し展開すれば

$$dF=F_PdP+F_\xi d\xi+F_QdQ+\frac{1}{2}F_{\xi\xi}(d\xi)^2 \tag{60}$$

と近似し得る。(52)式を代入し期待値をとれば

$$E[dF]=F_PdP+F_\xi[\alpha_\xi\xi dt+\sigma_\xi\xi dz_\xi]+F_QdQ+\frac{1}{2}F_{\xi\xi}[\alpha_\xi\xi dt+\sigma_\xi\xi dz_\xi]^2$$

$$=F_PdP+[\alpha_\xi\xi F_\xi+\frac{1}{2}F_{\xi\xi}\sigma_\xi^2\xi^2]dt+F_QdQ \tag{61}$$

がしたがう。しかるに，価格成長率 $dP/dt=\alpha_P$，瞬時的産出率 $dQ/dt=x$, $\alpha_\xi=\rho-\delta_\xi$ を考慮し，(61)式を dt で除せば

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2F_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi F_\xi+xF_Q+\alpha_PF_P-\rho F+[P-\widehat{C}(\xi,Q)]x=0 \tag{62}$$

を得る。

再び，(62)式は産出率 x に関して線型であるから，最適生産戦略の下で，x は，0かもしくは1のいずれかの値をとることに留意すれば，(62)式は，さらに，臨界価格 P^* に対し

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2F_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi F_\xi+F_Q+\alpha_PF_P-\rho F+[P-\widehat{C}(\xi,Q)]=0 \qquad \text{if } P\geq P^* \tag{63}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2F_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi F_\xi+\alpha_PF_P-\rho F=0 \qquad \text{if } P<P^* \tag{64}$$

と書き改められる。

しかるに，(63), (64)式は，次の境界条件を満たさなければならない。すなわち，

$$F(P,\infty,Q,t)=-\infty \tag{65}$$

$$\lim_{\xi\to 0}F_\xi(P,\xi,Q,t)=\frac{1}{\delta_\xi} \tag{66}$$

$$P^*(\xi,Q)-\widehat{C}(\xi,Q)+F_Q=0 \tag{67}$$

$$F(P,\xi,Q_m,t)=\bar{F}(P,\xi,t) \tag{68}$$

である。(65)式は，費用係数ξが∞となり，そこに留まり続けるならば，企業価値は∞から遠ざかり－∞となり続けることを意味する条件で，反射壁（reflecting barrier）と呼ばれる。[8]（66)式は，金額１単位の費用の低下による企業価値増分は，永久に支払われ続ける期間当たりの金額１単位の割引現在価値に他ならず，右辺に対応する。すなわち，

$$\int_0^\infty e^{\alpha_\xi t}e^{-\rho t}=\frac{1}{\alpha_\xi-\rho}=\frac{1}{\delta_\xi} \tag{69}$$

で表わされる。(67)式は，価格が限界費用から累積産出量の陰の価値F_Qを減じた値に等しいか，それを上回るとき常に生産を実行すべしとする最適生産の１階条件からしたがう。

最後に，(68)式は，$Q=Q_m$に至ると学習効果が作用せず生産費用が一定となり，したがって，$Q\geq Q_m$に対して企業価値が価格と限界費用係数に依存することを意味している。このときの企業価値を$\bar{F}(P,\xi,t)$で表わせば

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2\bar{F}_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi+\alpha_P\bar{F}_P-\rho\bar{F}+(P-\xi\underline{c})=0 \qquad \text{if } P\geq\xi\underline{c} \tag{70}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2\bar{F}_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi+\alpha_P\bar{F}_P-\rho\bar{F}=0 \qquad \text{if } P<\xi\underline{c} \tag{71}$$

がしたがう。

しかるに，さらに，生産物価格の瞬時的成長率$\alpha_P=1$，すなわち，生産物価格が時間を通じて一定値$\bar{P}$をとり続けるならば，(70)，(71)式は，それぞれ

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2\bar{F}_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi-\rho\bar{F}+(\bar{P}-\xi\underline{c})=0 \qquad \text{if } \bar{P}\geq\xi\underline{c} \tag{72}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\xi^2\bar{F}_{\xi\xi}+(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi-\rho\bar{F}=0 \qquad \text{if } \bar{P}<\xi\underline{c} \tag{73}$$

と書き改められる。(72)，(73)式の常微分方程式体系は，前節の(42)，(43)式の体系と同一の数学的構造をもち，そこでの議論がそのまま妥当し，同様の解方程式が導かれることが容易に確かめられる。

ところで，限界費用が(51)式におけるごとく特定化されるとき，状態評価函数は$F(P,\widehat{C}(\xi,Q))$の形で定義されるものとする。このとき，ξと$C(Q)$の積で表わされる限界費用$\widehat{C}(\xi,Q)$の増分は，$\widehat{C}_{\xi\xi}=0$，$C_{\xi Q}=C_{Q\xi}=C'(Q)$を考慮すれば，

$$d\widehat{C}=C(Q)d\xi+\xi C'(Q)dQ+C'(Q)d\xi dQ \tag{74}$$

で近似される。ここで，(52)式を(74)式に代入すれば，

$$d\widehat{C}=C(Q)[\alpha_\xi \xi dt+\sigma_\xi \xi dz_\xi]+\xi C'(Q)dQ+C'(Q)[\alpha_\xi \xi dt+\sigma_\xi \xi dz_\xi]dQ \tag{75}$$

がしたがう。(75)式の期待値をとれば

$$E[d\widehat{C}]=[(C(Q)+C'(Q))\alpha_\xi \xi]dt+\xi C'(Q)dQ \tag{76}$$

を得る。したがって，

$$E[dF]=F_P dP+F_C\{[(C(Q)+C'(Q))\alpha_\xi \xi]dt+\xi C'(Q)dQ\} \tag{77}$$

がしたがう。いま，両辺を dt で除し，再び，$dP/dt=\alpha_P, dQ/dt=x, \alpha_\xi=\rho-\delta_\xi$ を想起すれば，

$$F_C\{[(C(Q)+C'(Q))(\rho-\delta_\xi)\xi\}+\alpha_P F_P-\rho F+[P-\xi((Q)+\xi C'(Q)]x=0 \tag{78}$$

を得る。

しかるに，いま，境界条件が満たされるものとし，$Q=Q_m$ に至ると学習効果が作用しなくなることに注意すれば，それ以上の累積産出量水準の下での企業価値は，価格 P と限界費用係数 ξ のみに依存することになる。これを $\bar{F}(P,\xi,t)$ で表わし，$\bar{F}_\xi=\underline{c}\bar{F}_C$ を考慮すれば，(78)式から

$$(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi+\alpha_P\bar{F}_P-\rho\bar{F}+(P-\xi\underline{c})=0 \qquad \text{if } P\geq\xi\underline{c} \tag{79}$$

$$(\rho-\delta_\xi)\xi\bar{F}_\xi+\alpha_P\bar{F}_P-\rho\bar{F}=0 \qquad \text{if } P<\xi\underline{c} \tag{80}$$

がしたがう。しかるに，(79), (80)式を一般型で表わされた企業価値の場合において妥当する偏微分方程式体系(70), (71)式と比較すると，確率的限界費用係数が乗法的に作用する場合の方程式は，２次項 $\bar{F}_{\xi\xi}$ を欠いたものとなること以外，両者は形式的に一致する。

さて，生産物価格と限界費用の両方に二重の不確実性が作用する場合を想定し，そこでの生産決定のあり方をみてみよう。[9]

再び，企業の問題は，$0\leq x\leq 1$ の制約の下で

$$\max_{x(t)} J=\int_0^\infty[P(t)-\widehat{C}(\xi,Q)]x(t)e^{-\rho t}dt \tag{81}$$

を解く産出率 $x(t)$ を決定することであるものとする。ここで，生産物価格と限界費用に関して一次同次（homogeneous of degree 1）を成す状態評価函数を定義するために，限界費用係数に代えて限界費用それ自体を直接要素とするものとする。このとき，状態評価函数 $J(P,\widehat{C},Q)$ が定義される。いま，価格，限界費用は確率変数であり，それぞれ幾何 Brown 運動

$$dP=\alpha_P Pdt+\sigma_P Pdz_P \tag{82}$$

$$d\widehat{C}=\alpha_C\widehat{C}dt+\sigma_C\widehat{C}dz_C \tag{83}$$

にしたがって変動するものとする。

上と同様の手続を適用すれば，Bellman 方程式

$$\rho J(P, \widehat{C}, Q) = \pi^*(P, \widehat{C}, Q) + \frac{1}{dt}E[J] \tag{84}$$

がしたがう。このとき，利潤も限界費用$\widehat{C}$を要素とすることに注意されたい。

ここで，伊藤補題を適用し，企業価値の増分を展開すれば

$$dJ = J_P dP + J_C d\widehat{C} + J_Q dQ + \frac{1}{2}J_{PP}(dP)^2 + \frac{1}{2}J_{CC}(d\widehat{C})^2 + J_{PC}dPd\widehat{C} + J_{PQ}dPdQ + J_{CQ}d\widehat{C}dQ \tag{85}$$

がしたがう。ここで，(85)式を(82)，(83)式に代入し，期待値をとり，$E[dz_P dz_C] = \rho_{PC}dt$ を考慮すれば

$$E[dJ] = \{[\alpha_P P J_P + \alpha_C \widehat{C} J_C + \sigma_P \sigma_C \rho_{PC} P \widehat{C} + \frac{1}{2}[\sigma_P^2 P^2 J_{PP} + \sigma_C^2 \widehat{C}^2 J_{CC}]\}dt + J_Q dQ \tag{86}$$

を得る。

ここで，(86)式の両辺を dt で除し，$dQ/dt = x$ を想起すれば

$$\frac{E[dJ]}{dt} = \frac{1}{2}[\sigma_P^2 P^2 J_{PP} + \sigma_C^2 \widehat{C}^2 J_{CC} + 2\sigma_P \sigma_C \rho_{PC} P \widehat{C} J_{PC}] + \alpha_P P J_P + \alpha_C \widehat{C} J_C + J_Q x \tag{87}$$

がしたがう。ここで，(87)式を上の Bellman 方程式((84)式)に代入すれば

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\sigma_P^2 P^2 J_{PP} + \sigma_C^2 \widehat{C}^2 J_{CC} + 2\sigma_P \sigma_C \rho_{PC} P \widehat{C} J_{PC} + (\rho - \delta_P) P J_P \\ &\quad + (\rho - \delta_C)\widehat{C} J_C + J_Q x + [P - \widehat{C}(Q)]x = 0\end{aligned} \tag{88}$$

がしたがう。しかるに，(86)式は，産出率 x に関して線型であるから，最適生産戦略の下で，x は 0 か 1 の値をとることを想起すれば，(86)式は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\sigma_P^2 P^2 J_{PP} + \sigma_C^2 \widehat{C}^2 J_{CC} + 2\sigma_P \sigma_C \rho_{PC} P \widehat{C} J_{PC}] + (\rho - \delta_P) P J_P + (\rho - \delta_C)\widehat{C} J_C \\ &\quad + J_Q - \rho J + [P - \widehat{C}(Q)] = 0 \qquad \text{if} \quad P \geq \widehat{C}(Q_m)\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\sigma_P^2 P^2 J_{PP} + \sigma_C^2 \widehat{C}^2 J_{CC} + 2\sigma_P \sigma_C \rho_{PC} P \widehat{C} J_{PC}] + (\rho - \delta_P) P J_P + (\rho - \delta_C)\widehat{C} J_C \\ &\quad + J_Q - \rho J = 0 \qquad \text{if} \quad P < \widehat{C}(Q_m)\end{aligned} \tag{90}$$

と書き改められる。

ところで，境界条件が満たされるものとすると，まず，$Q = Q_m$ に至るまで生産を継続したときの企業価値は，等値化条件より

$$J(P, \widehat{C}, Q_m) = \bar{J}(P, \widehat{C}) \tag{91}$$

で表わされる。(91)式は，Q が Q_m に等しいか，それ以上の水準にあるとき企業価値は P と $\hat{C}$ のみに依存することを意味する。これを $\bar{J}(P, \hat{C})$ で表わそう。

しかるに，P と $\hat{C}$ の現行値が同時に 2 倍されると収入と限界費用が 2 倍され，したがって，利潤，さらには企業価値も 2 倍される。すなわち，$\bar{J}(P, \hat{C})$ が $P, \hat{C}$ に関して一次同次を成すことになる。このとき，$p = P/\hat{C}$ と設定すれば，$\bar{J}$ の 1 次同次性は

$$\bar{J}(P, \hat{C}) = \hat{C}\hat{J}(P/\hat{C}) = \hat{C}\hat{J}(p) \tag{92}$$

を意味する。ここで，(92)式に逐次的に微分を施していけば，

$$\bar{J}_P(P, \hat{C}) = \hat{J}'(p) \tag{93}$$

$$\bar{J}_C(P, \hat{C}) = \hat{J}(p) - p\hat{J}'(p) \tag{94}$$

$$\bar{J}_{PP}(P, \hat{C}) = \hat{J}''(p)/\hat{C} \tag{95}$$

$$\bar{J}_{PC}(P, \hat{C}) = -p\hat{J}''(p)/\hat{C} \tag{96}$$

$$\bar{J}_{CC}(P, \hat{C}) = p^2\hat{J}''(p)/\hat{C} \tag{97}$$

がしたがう。これらを(90)式に代入すれば

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho_{PC}\sigma_P\sigma_C + \sigma_C^2)p^2\hat{J}''(p) + (\delta_C - \delta_P)p\hat{J}'(p) - \delta_C\hat{J}(p) = 0 \tag{98}$$

がしたがう。(98)式は，常微分方程式を成す。

一度び，$\hat{C}$ の値が確定すると，以後の限界費用の不確実性は妥当しなくなり，現行価格が P のとき，企業価値は利便利益 δ_P に対し $J(P) = p/\delta_P$ で表わされる。このとき，企業が生産を即実行するならば，等値化条件（value-matching condition）

$$\bar{J}(P, \hat{C}) = J(P) - \hat{C} = P/\delta_P - \hat{C} \tag{99}$$

$$\text{or}\quad \hat{J}(p) = p/\delta_P - \hat{C} \tag{100}$$

がしたがう。さらに，境界で $\bar{J}(P, \hat{C})$ と $J(P) - \hat{C}$ が接し合わなければならず，平滑張合わせ条件（smooth-pasting conditions）

$$\bar{J}_P(P, \hat{C}) = J'(P) - 1/\delta_P \tag{101}$$

$$\text{or}\quad \hat{J}'(p) = 1/\delta_P \tag{102}$$

と，

$$\bar{J}_C(P, \hat{C}) = -1 \tag{103}$$

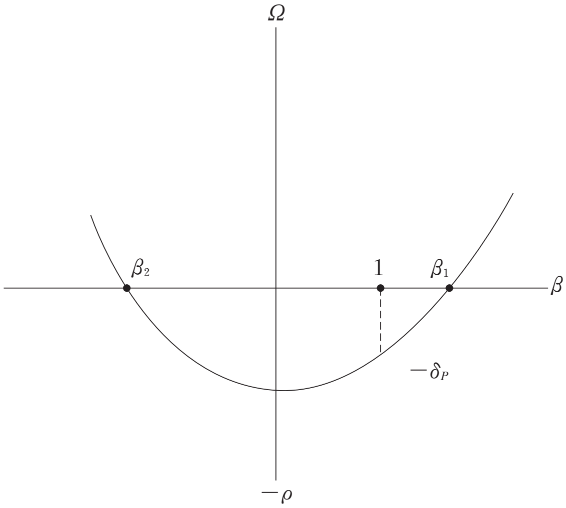


図-3

$$\text{or}\quad \hat{J}(p)-p\hat{J}'(p)=-1 \tag{104}$$

が満たされなければならない。しかるに，上の3つの条件のうち，1つは他の2つから導かれることが容易に確かめられる。しかるに，上の2次同次微分方程式((98)式)は$\hat{J}$とその微係数に関して線型を成すから，一般解は，2つの独立解の一次結合で与えられる。いま，函数$A\hat{J}^{\beta}$を試み，代入を行なえば，βが2次方程式の解であれば，この函数を満足させるものとなる。すなわち，基本2次方程式は

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2-2\rho_{PC}\sigma_P\sigma_C+\sigma_C^2)\beta(\beta-1)+(\delta_C-\delta_P)\beta-\delta_C=0 \tag{105}$$

で与えられる。ただし，$\beta_1>1$で正根，$\beta_2<0$で負根である。このとき，吸収壁の境界条件から$A_2=0$となり

$$\hat{J}(p)=A_1p^{\beta_1} \tag{106}$$

が残る。

いま，(105)式の左辺をΩとすると

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}+\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}=0 \tag{107}$$

がしたがう。ただし，すべての微係数はβ_1で評価される。**図-3**から明らかなごとく[10]，β_1において$\partial\Omega/\partial\beta>0$がしたがう。さらに，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}=\sigma\beta(\beta-1)>0 \tag{108}$$

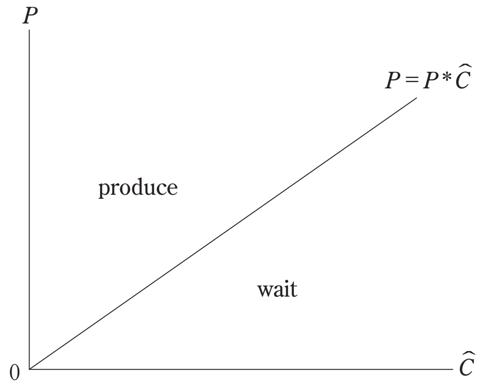


図-4

がしたがい，したがって，$\partial\beta_1/\partial\sigma<0$を得る。$\sigma_1$の上昇につれ$\beta_1$は低下する。ここで，$\hat{J}(p)=Ap^{\beta_1}$((106)式)を境界条件(102)，(104)式に代入すれば，臨界価格p^*が

$$\frac{P^*}{\hat{C}^*}=p^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\delta_P \tag{109}$$

で与えられる。(109)式は，空間$(P,\hat{C})$において，傾き$p^*=\dfrac{\beta_1}{\beta_1-1}\delta_P$をもつ原点から発する直線を与える。(**図-4**参照[11]。) したがって，σ_Pないしσ_Cが上昇すればβ_1が低下し，乗数$\beta_1/(\beta_1-1)$が上昇する。しかしながら，ρが上昇すると乗数$\beta_1/(\beta_1-1)$が低下する。いま，分散を固定するとき，Pと$\hat{C}$の共分散が上昇すればする程，その比$P/\hat{C}$の不確実性は小さくなる。このことは，生産を停止し，待機を選択することへの誘因を減少させることを意味する。

8）反射壁（reflecting barrier）について，Malliaris＝Brock, *op. cit.*,（p. 200）参照。
9）以下の議論における手続きを Dixit＝Pindyck, *op. cit.*,（Chap. 5, 6）に負う。
10）Dixit＝Pindyck, *op. cit.*, Figure 5. 2.（p. 143）に対応する。
11）Dixit＝Pindyck, *op. cit.*, Figure 6. 8.（p. 208）に対応する。

結びにかえて

1960年代末から1970年代初頭にかけて，学習（learning）が幼稚産業（infant industries）の保護の論拠として援用されることがあった。学習する能力を持ちながら，公的保護がなされないばかりに国内幼稚産業が対外競争によって蝕まれていくという論法であった。その根底には，学習は，生産における一種の異時点間外部性ないし規模の経済性を生むとする認識が働いていた筈である。しかるに，学習曲線，すなわち，累積産出量が生産の単位費用の低下を促がす関係が確認されるところで，学習は埋没費用（sunk cost）をともなう一種の投資行為であるという理解に辿り着くまでには，もう少しの時間が必要であったごとくである。

累積産出量の学習効果が働くところで，限界費用が限界収入を上回る水準まで現行の生産が実行される。すなわち，現行の生産の増分が学習曲線を下方に向ける分だけ将来の生産費用を低下させ

る，したがって，一部その費用を相殺する影の価値（shadow value）が現出すると理由づけられる。このとき，現行生産水準では，限界費用が陰の価値分だけ限界収入を上回ることになる。

上では，まず，累積産出量が企業価値にもたらす限界的効果を累積産出量の陰の価値とみなし，動的計画法の適用によって，生産が実行されるとき陰の価値が生産物価格に依存し，その価格の上昇には陰の価値の上昇が対応することが確かめられた。

次に，生産物価格が確率過程にしたがう確率変数となるとき，生産が実行されるところで，その水準は，限界費用が陰の価値分だけ限界収入を上回るそれとなることが確認された。さらに，学習曲線は，生産への支出額の一部を将来費用の低下への不可逆的な投資とすることによって生産に影響を行使するから，不確実性は，現行の生産水準の決定に際して，学習曲線の重要性を減ずるべく作用することになる。将来価格に関する不確実性は，当該投資純益を低下させる機会費用を構成する。

逆に，生産に技術的不確実性が作用し，限界費用に乗法的に働く係数が確率過程にしたがう確率変数であるとき，生産が実行されるところで，再び，累積的産出量の陰の価値分だけ限界費用が限界収入を上回る水準が選択される。しかしながら，限界費用係数の上昇には累積的産出量の陰の価値の低下が対応することが帰結される。

さらに，不確実性が生産物価格と同時に限界費用にも作用するものとし，生産物価格，そして限界費用それ自体がそれぞれの確率過程にしたがう確率変数となる情況が想定された。累積産出量がもはや学習効果を生まない高水準に達するところで，企業価値は生産物価格と限界費用のみに依存し，企業価値が両者の１次同次の状態評価函数を導くとき，生産を実行する領域と生産を先送りし待機する領域を分割する臨界的価格－限界費用比率が導かれ，このとき，両確率変数の共分散の上昇には価格－限界費用比率の不確実性の低下が対応し，生産を先送りし待機する誘因を減少させることが帰結された。

上の議論に，技術革新の可能性を導入することは，興味深い発展化の一方向であろう。

References

〔１〕 A. Alchian, “Reliability of Progress Curves in Airframe Production,” *Econometrica*, 31, 1963.

〔２〕 K. J. Arrow, “The Economic Implications of Learning-by-Doing,” *Review of Economic Studies*, 29, 1962.

〔３〕 N. Baloff, “Extensions of the Learning Curve−Some Empirical Results,” *Operational Research Quarterly*, 27, 1971.

〔４〕 A. K. Dixit and R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

〔５〕 B. Dumas, “Super Contact and Related Optimality Conditions,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 1991.

〔６〕 D. Fudenberg and J. −J. Tirole, “Learning-by-Doing and Market Performance,” *Bell Journal of Economics*, 14, 1983.

〔７〕 W. Z. Hirsch, “Manufacturing Progress Functions,” *Review of Economics and Statistics*, 34, 1952.

〔８〕 S. Kalish, “Monopolist Pricing with Dynamic Demand and Production Cost,” *Marketing Science*, ２, 1983.

〔９〕 D. Kreps and A. M. Spence, “Modelling the Role of History in Industrial Organization and Competition,” in G. Feiwel, ed., *Contemporary Issues in Modern Microeconomics*, Macmillan, 1984.

〔10〕 M. B. Lieberman, “The Learning Curve and Pricing in the Chemical Processing Industries,” *RAND Journal of Economics*, 15, 1984.
〔11〕 S. Majd and R. S. Pindyck, “The Learning Curve and Optimal Production under Uncertainty,” *RAND Journal of Economics*, 20, 1989.
〔12〕 A. G. Malliaris and W. A. Brock, *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland, 1982.
〔13〕 R. McDonald and D. Siegel, “Investment and Valuation of Firms When There Is an Option to Shut Down,” *International Economic Review*, 26, 1985.
〔14〕 D. Mookherjee and D. Ray, “Collusive Market Structure under Learning-by-Doing and Increasing Returns,” *Review of Economic Studies*, 58, 1991.
〔15〕 L. Rapping, “Learning and World War II Production Functions,” *Review of Economics and Statistics*, 48, 1965.”
〔16〕 F. Scherer, *Industrial Market Structure and Economic Performance*, Rand McNally, 1980.
〔17〕 A. M. Spence, “The Learning Curve and Competition,” *Bell Journal of Economics*, 12, 1981.
〔18〕 ________, “Cost Reduction, Competition and Industry Performance,” *Econometrica*, 52, 1984.
〔19〕 T. P. Wright, “Factors Affecting the Cost of Airplanes,” *Journal of Aeronautical Sciences*, 3, 1936.
〔20〕 M. B. Zimmerman, “Learning Effects and the Commercialization of New Energy Technologies : The Case of Nuclear Power,” *Bell Journal of Economics*, 13, 1982.