Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 49, No. 3, 1-17, 2015

PPP 計測の CGE 接近（1）[1]

作間 逸雄*・市岡　修**・牧野 好洋***

目次

はじめに

本稿は，購買力平価（Purchasing Power Parity, PPP）計測の新しいアプローチを提案する[2]。購買力平価計測のために早い時期から広く使われているギアリー・カーミス法（Geary-Khamis Method，以下，GK 法）について，プラサダ・ラオ（D. S. Prasada Rao）は，GK 法と，個別家計（国・地域のように見られた）がコブ・ダグラス型効用関数をもつ，ワルラス的純粋交換一般均衡

＊専修大学経済学部教授
＊＊専修大学経済学部教授
＊＊＊静岡産業大学経営学部准教授

1）本稿に示される研究のうち，作間，市岡の執筆部分は，2012年度専修大学研究助成（共同研究）「購買力平価測定の CGE アプローチ」の成果の一部である。付録を含む牧野の担当部分は，JSPS 科研費2453023の助成を受けた研究の成果の一部である。

2）本稿は，2004年国際所得国富学会報告論文 Sakuma et al.［2004］の改善版であり，当該論文に含まれていた誤りを修正し，若干の進展を示す。続稿では，購買力平価の計算に用いられた数値例を各国あるいは各地域の現実の数値に置き換えた，購買力平価や物価の地域差の計測結果を示す予定である。

3）Prasada Rao［1985］。

計算との同等性を発見した[3]。本稿では，彼の貢献に基づきながら，発想を逆転し，一般均衡計算の方法による，購買力平価の計測が可能であることを示す。

たとえば，効用関数型を変更したり，純粋交換モデルを，生産を含む一般均衡モデルに拡張したりすることによって，新しい購買力平価の計算方法を提示することができる。その中のあるものは，GK 法のように，データ行列から固有ベクトルを計算することに帰結するが，他のあるものは，特定の一般均衡モデルそのものが計算方法の提示手段となるだろう。われわれは，このような方法が購買力平価の計測だけでなく，物価指数全般の計算方法や理論の革新につながる可能性があるものと考えている。

本稿は，以下のように構成される。まず，第 1 節では，購買力平価の概念的説明を行ない，通常の物価指数が物価水準の時間比較のための指数であるのに対して，購買力平価は，国や地域といった，空間比較のための指数であること，さらに，このような空間比較の指数が指数理論の新たな研究領域となったのは，そこに含まれる推移性の要請のためであることが示される。国際比較プログラム（ICP）における購買力平価計測と実質 GDP とその支出側構成項目の（PPP を用いた）国際比較の概要を述べる。

時間比較の物価指数のための多くの算式が存在するように，購買力平価にも，多数の算式が考案されてきた。本稿第 2 節では，その中でも，GK 法に焦点をあて，本稿の理論的基礎であるプラサダ・ラオの命題が提示される。エッジワースのボックス・ダイアグラムを使って図による説明を追加する。続く第 3 節では，一般均衡計算の手法を用いて，購買力平価と実質産出とその構成を同時決定することができることが示される。また，同時に，効用関数型の選択，純粋交換か，生産を含む一般均衡か，また，後者の場合，中間消費を取り入れるかどうか，本源的生産要素の移動可能性の有無をどう仮定するのか，といった選択により，この手法には多様なヴァリアントが含まれうることが示される。

旧稿（Sakuma et al.［2004］）では，数値例をもちいた一般均衡計算を，数理計画法でよく使われるソフトウェアである GAMS の上で，Hercules を動かすことによって行なった。この方法は，一般均衡計算の手法として少なくとも，1990年代なかばまで主流の方法のひとつであったが，Hercules には，かなり深刻な能力上の限界があることもわかっていた。今回の一般均衡計算では，計量分析用のソフトウェア TSP を CGE に用いるという方法を採用した。方法の概要を付録とした。

1. 購買力平価（PPP）の概念と計測

本節では，まず，購買力平価（purchasing power parity）とは何か，ということを説明し，その計測に必要なデータについて考察する。次に，購買力平価を計算するとともに，為替レート換算によることなく，GDP とその構成要素を国際比較することを目的とした国際プロジェクトである ICP について，その概要を述べる。

時間比較の物価指数算式，たとえば，次のラスパイレス式物価指数算式（PI_L）について考えてみよう。

$$PI_L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

ここで，もちろん，添え字 0 は，基準となる期間（基準年）を示し，1 は，比較対象となる期間

（比較年）を示す。購買力平価を含む空間比較の指数は，添え字を読み替えることによって導入することができる。すなわち，0を基準年ではなく，基準国（たとえば，米国）として，1を比較年ではなく，比較国（たとえば，日本）と解釈することにより，ラスパイレス式の購買力平価の算式が得られる。あらためて，米国を u，日本を j の添え字で示すことにすると，日米のラスパイレス式購買力平価算式が得られる。

$$PPP_u^j = \frac{\sum p_j q_u}{\sum p_u q_u}$$

米国と日本，日本と英国，英国とフランス（EU）というように，各国間の購買力平価を2国間比較（binary comparisons）の購買力平価として計算することができるが，それと同時に，米国，日本，英国，フランス（EU）といった多数の国を同時に比較することも考えられる。多国間比較（multilateral comparisons）である。

たとえば，米国を一貫して基準国として用い，ラスパイレス指数算式を作成すれば，多数の国を対象とするラスパイレス式購買力平価が得られるであろうが，基準国を他の国，たとえば，日本にすれば，まったく別の購買力平価数値が得られるであろう。すなわち，この方法では，基準国不変性を満たさない。基準国不変性を満たしながら，合理的に多数国間の比較を行なう方法が必要となった。

実は，空間比較の指数が単に時間比較の指数の添え字の読み替えではなく，指数理論の新たな領域として認識されるようになったのは，こうした多国間比較（多地域間比較）で，推移性（transitivity）という性質が満たされるべきだとされたことによる。たとえば，フランス対日本の比較は，それを直接行なった場合でも，米国を経由して間接的に行なった場合でも，同じ結果をもたらさなければならない。すなわち，次の性質が満たされなければならない[4]。

$$PPP_j^f = \frac{PPP_u^f}{PPP_u^j}$$

ところが，フィッシャーの理想算式がこの性質（フィッシャーの7つのテストの中の「循環性テスト」）を満たさないことからも知られるように，伝統的な時間比較の指数理論においては，この性質はあまり重視されていなかったと考えられる。空間比較の指数が指数理論に新たな研究領域を提供したのは，推移性（循環性）という，この性質をもつことを条件として，指数算式の探求や算式を基礎づける経済理論の追究をすることが要請されたことによるといってよいだろう。

さらに，フィッシャー・テストに含まれず，フィッシャーの理想算式が満たさない，もうひとつの性質が，購買力平価の重要な利用目的から派生した。すなわち，1950年代から，為替レートによらない国民勘定項目（GDP とその支出側構成項目など）の国際比較に対する関心が高まり，1968年に，国際連合統計部（UNSO）とペンシルベニア大学の共同プロジェクトとして，国際比較プログラム（International Comparison Programme，ICP，発足当初は，International Comparison Project，名称変更は，1987年第24回国連統計委員会）が発足する。表1として，その沿革を示す。同プロジェクトでは，国内総生産のその支出側内訳項目が対応する購買力平価で換算され，しかも，名目値間

4）この性質が，多国間の為替レートに裁定の結果としてもたらされると考えられる性質であることはよく知られている。

で成り立つ加法的関係（GDP がそれを構成する消費，投資，政府の合計と等しい）が，実質値，すなわち，購買力平価換算値でも成り立つことが要請された。加法的整合性（additive consistency）あるいは行列整合性（matrix consistency）である[5)]。加法的整合性をもつ指数は，（連鎖方式でない）ラスパイレス指数のように，部分と全体との関係が明確に示されるという利点をもつ。

表１　国際比較プログラム（ICP）の沿革

ラウンドまたはフェーズ	対象年	参加国(経済)	事業主体	備考
第Ⅰ期	1970(1967)	10（６）	国連統計部（UNSO）・ペンシルベニア大学	フォード財団・世界銀行の財政支援あり，日本は，個人レベルの参加。
第Ⅱ期	1973	16	同上	
第Ⅲ期	1975	34	同上	日本，正式参加。
第Ⅳ期	1980	60	国連統計部（UNSO）	国連統計部のレギュラー・プログラムに。地域化の導入。
第Ⅴ期	1985	64	同上	
第Ⅵ期	1993	117	同上	世界比較結果なし。
第Ⅶ期	2005	146	世界銀行	
第Ⅷ期	2011	199	世界銀行	

推移性および加法的整合性をもつ購買力平価算式として初期の ICP で採用されたのが，GK 法である。この方法については，次節で説明する。以下，本節では，ICP 事業の線に沿って，GK 法を含む集計算式で，購買力平価を計算し，国民勘定集計値とその構成項目の各国間比較を行なうために必要なステップについて，単純化したかたちで概観する[6)]。まず，

1）国民勘定データが概念的に比較可能な方式で利用可能でなければならない。この点に関連して，ICP が発足した1968年が，68SNA の刊行年であることは，象徴的である。68SNA の刊行をきっかけにして，各国の国民勘定統計は，「SNA への収束」を始めたからである。しかも，使用される国民勘定データは，共通の方式で適切に分類されていなければならない。ICP の場合，GDP を住民の最終消費支出，資本形成，公的最終消費支出に，まず，３分類し，もっとも細かい分類レベルでは，百数十の基礎項目（basic headings）にまで分類する。こうして，$i=1, \cdots, m$ をカテゴリーの添え字，$j=1, \cdots, n$ を国の添え字とし，

5）加法的整合性と行列整合性との間には，微妙なちがいがある。ラスパイレス算式で計算された消費者物価指数の場合，品目レベルの指数を加重算術平均式によって小分類，中分類，十大費目といった上位の指数に集計してゆく。したがって，その指数は，加法的整合性をもつ。ところが，後述する GK 法では，GDP 全体のレベルの PPP は，下位項目の PPP から積み上げられて計算されているわけではない。そのため，ICP では，従来から指数理論で使われていた加法的整合性という用語を避け，行列整合性という新しい用語を用意した。

6）第Ⅴ期までの詳細については，作間［1989］を参照せよ。言及されることの多い EUROSTAT-OECD 事業を含む地域化についての詳細については，触れる余裕がない。

$$V = (v_{ij})$$

の金額行列を得る。この行列の各列は，各国通貨表示である。

2）基礎項目ごとに，（基本的に，複数）品目（item）を選定し，そのスペックを指定する。

3）参加国は，指定された品目・スペックについて，全国年間平均価格を報告する。

4）V 行列のすべての要素は，$v_{ij}=p_{ij}q_{ij}$ のかたちに，価格要素，数量要素に分解できることが想定されている。基礎項目（basic heading）レベルの購買力平価 p_{ij} が計算されていなければならない[7]。基準国を n 番目の国とし，基礎項目レベルの同国の購買力平価を 1 として（$p_{in}=1$ として）測定することにする。$q_{ij}=v_{ij}/p_{ij}$ は，概念的数量（notional quantities）と呼ばれる。

5）この p_{ij} と q_{ij} によって，P 行列，Q 行列が作られ，この 2 つの行列（P 行列と，V 行列といっても，同じことである）を投入データとして，GDP とその内訳項目のレベルで実質値と購買力平価とが計算される。GK 法その他の集計算式が利用される。

2. GK 法と Prasada Rao の命題

現在では，ICP で用いられる唯一の方法であるわけではないが，推移性，基準国不変性，行列整合性など，多国間購買力平価算式として優れた性質をもつ，よく知られた算式であることに変わりはない。

GK 法は，次式によって，各基礎項目の世界価格と各国の購買力平価とを同時決定する方法である。

$$p_i=\sum_j (p_{ij}/PPP_j)\,(q_{ij}/\sum_j q_{ij})$$
$$PPP_j=\sum_i p_{ij}q_{ij}/\sum_i p_i q_{ij}$$

ここで，$p_i(i=1,\cdots,m)$ は，第 i 基礎項目の世界価格，$PPP_j(j=1,\cdots,n)$ は，第 j 国の最も集計されたレベル（GDP）の購買力平価である。

上の 2 つの式のうち，1 番目の式は，各項目の世界価格が購買力平価で共通単位に換算された各国価格の加重算術平均として定義されること，2 番目の式は，GDP デフレーターが名目（当期価格表示）GDP と実質（不変価格表示）GDP の比として定義されるように，購買力平価が，各国通貨表示の GDP と世界価格表示の GDP の比として定義されることを示したものと理解するとわかりやすい。計算される購買力平価は，基準国不変性および推移性をもつので，各国間の購買力平価は，$PPP_j^k(j=1,\cdots,n,k=1,\cdots,n)$ のかたちではなく，ベクトル $ppp=(PPP_1,PPP_2,\cdots,PPP_n)$ のかたちで表現できる。もちろん，$PPP_j^k=PPP_k/PPP_j$ である。世界価格ベクトルを列ベクトルとして $p=(p_i)$ と定義すると，上の 2 つの式は，世界ベクトルが次のような固有値問題の固有行ベクトルであることが知られる。

$$p'=p'Q\mathrm{B}'\widehat{Qi}^{-1}$$

7）本稿では，このレベルの購買力平価の計測については触れない。Kurabayashi and Sakuma［1990］の第 4 章を参照せよ。

ここで，$\mathrm{B}=(\beta_{ij})=\left(\frac{p_{ij}q_{ij}}{\sum_k p_{kj}q_{kj}}\right)$，$p'$ や B' におけるプライムは，転置をあらわす。このように，世界価格が得られれば，各国の実質産出ベクトル $q=(q_j)$ は，

$$p'Q=q'$$

として与えられる。

簡単な数値例（２国２財）を導入しよう。

$$P=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 3 & 15\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}30 & 50\\ 40 & 60\end{pmatrix}$$

２番目の国を基準国として，基礎項目レベルの購買力平価を測定することにすれば，第２国のすべての項目の価格は，１となり，各行は，基礎項目レベルの購買力平価(たとえば，ビッグ・マック・パリティー）の測定結果を示していることになる。$\bar{P}$ 行列と呼ぶことにしよう。たとえば，第１国の第１項目パリティーは，基準国通貨１に対して，0.167である。Q 行列は，概念的数量を表示する$\bar{Q}$ 行列となる。基準国＝第２国について，$\bar{Q}$ 行列の第２列を合計すれば，そのまま第２国の GDP となるはずである。したがって，現実のデータ投入は，次のようになる。

$$\bar{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{12} & 1\\ \frac{3}{15} & 1\end{pmatrix},\quad \bar{Q}=\begin{pmatrix}360 & 600\\ 600 & 900\end{pmatrix}$$

価額行列は，次の通りである。

$$V=\begin{pmatrix}60 & 600\\ 120 & 900\end{pmatrix}$$

GK 法は，次の行列の（固有値１に対する）固有行ベクトルである。

$$\begin{aligned}Q\mathrm{B}'\widehat{Qi}^{-1}&=\begin{pmatrix}30 & 50\\ 40 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 2/5\\ 2/3 & 3/5\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}80 & 0\\ 0 & 100\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}0.375 & 0.5\\ 0.467 & 0.627\end{pmatrix}\end{aligned}$$

世界価格ベクトルは，(0.7467，1.000）であり，基準国 GDP が実質値＝名目値となるように，基準化することにすれば，基準国の名目 GDP＝実質 GDP は，1500であり，第１国については，名目 GDP180に対して，実質 GDP は，961.6となる。第１国の購買力平価は，名目 GDP／実質 GDP＝0.187となる。具体的には，次の通り。

$$\frac{30\times 2+40\times 3}{(30\times 0.7467+40\times 1.000)\times 15.4107}=\frac{180}{961.6}=0.187$$

なお，$\bar{P},\bar{Q}$ を投入データとすると，世界価格ベクトルについては，異なるが，実質 GDP，購買力平価については，同一の結果が得られる。

プラサダ・ラオは，1985年の国際所得国富学会（オランダ・ノールトウェイケルハウト）で，注

目すべき報告をした。その報告によると，GK 法で計算される世界価格は，各国経済を，コブ・ダグラス効用関数をもつ各家計に置き換え，ワルラス的一般均衡を純粋交換の仮定のもとに計算した一般均衡価格と一致する。

彼の命題において，Q は，二重の役割をもっていると考えられる。一方で，それは，（各国の，あるいは，各家計の）初期保有であり，他方で，P の列のうち，当該国に対応する列（当該国国内の価格状況）に対する当該初期保有分から得られる反応とみなすことができる。後者の役割から，コブ・ダグラス・シェアパラメーターは，上述の B 行列で与えられる。

まず，未知の一般均衡価格 p に対する第 j 国の反応は，次の式で示される。

$$q_{ij}^{d}=\frac{\beta_{ij}\sum_{i}p_{i}q_{ij}}{p_{i}}$$

これを各国について合計して，各項目の供給（所在量）$\sum_{j}q_{ij}$ と等しくなるように均衡価格が決定される。すなわち，

$$\sum_{j}q_{ij}=\sum_{j}\frac{\beta_{ij}\sum_{i}p_{i}q_{ij}}{p_{i}}$$

この式を行列表示すると，$p' = p' Q \mathrm{B}' \widehat{Qi}^{-1}$となる。

このように，GK 法で計算される世界価格は，各国経済を，コブ・ダグラス型効用関数をもつ各家計に置き換え，ワルラス的一般均衡を純粋交換の仮定のもとに計算した一般均衡価格と一致することが示された。

本節の残りの部分では，２国２財の純粋交換を仮定し，それをエッジワースのボックス・ダイアグラムに記述し，以下の２点を導出する。第一に，GK 法で計算される世界価格は，パレート最適をもたらす。第二に，GK 法で計算される世界価格は，第１財と第２財の交換比率に相当する。

第 j 国（$j=1，2$）における第 i 財（$i=1，2$）の初期保有量をそれぞれ q_{ij}，価格を p_{ij} とする。図１のボックス・ダイアグラムにおいて，第１国の原点を左下，第２国の原点を右上に配置し，第１財の数量を横軸，第２財の数量を縦軸にとる。図中の①は各国の初期保有量を示す。

第 i 財（$i=1，2$）の世界価格を p_i とすれば，同図において，その相対価格は p_1/p_2である。相対価格が変化したときのオファー曲線を，第１国について実線で，第２国について破線で描く。

上図は，概念的なものであるが，本稿の数値例のもとで，エッジワースのボックス・ダイアグラムを作成すると，図２のようになる。

図１において，相対価格が（あ）であるとき，第１国の需要量は同国のオファー曲線と相対価格（あ）を示す直線が交わる②で決まる。同様に第２国の需要量は③で決まる。このとき，第１財は需要超過であり，価格 p_1は上昇，第２財は供給超過であり，価格 p_2は低下する。

その結果，p_1/p_2は上昇，相対価格が（い）で示されたとする。このとき，第１国の需要量は同国のオファー曲線と相対価格（い）を示す直線が交わる④で決まる。同様に第２国の需要量も④で決まる。第 j 国（$j=1，2$）における第 i 財（$i=1，2$）の需要量はそれぞれ q_{ij}^{d} であり，第１財，第２財とも需給が均衡する。これが一般均衡価格であり，GK 法で計算される世界価格である。

ここから以下の２つが分かる。第一に，④は契約曲線上の点であり，ボックス・ダイアグラムにおいて得られる一般均衡価格，すなわち GK 法で計算される世界価格は，パレート最適をもたらす。第二に，同様の一般均衡価格，すなわち GK 法で計算される世界価格は，ボックス・ダイアグラム

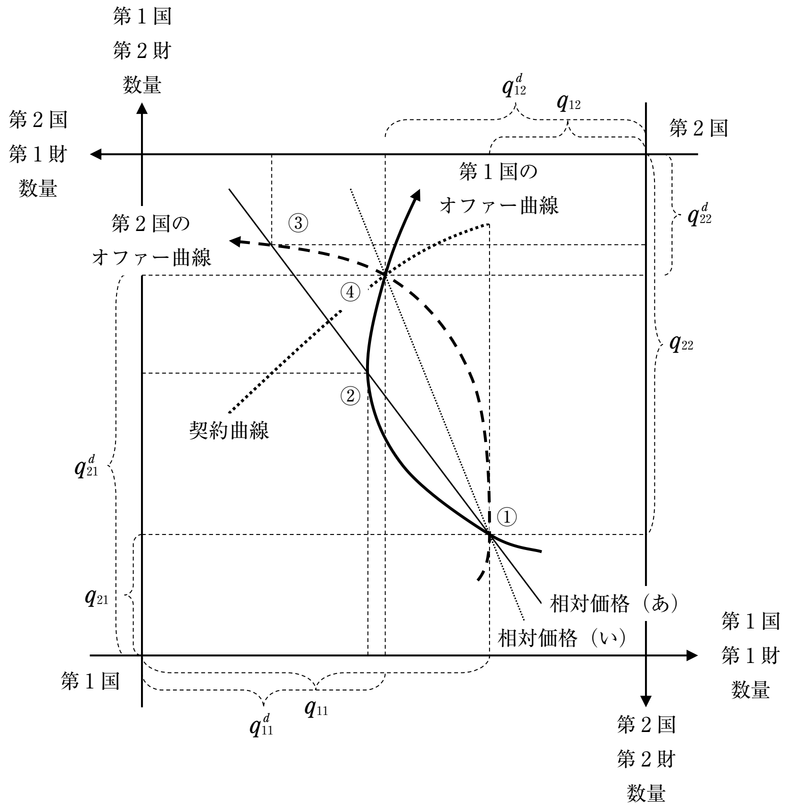

図１　エッジワースのボックス・ダイアグラム

において，初期保有量を示す点と両国のオファー曲線が交わる点を結んだ傾き，すなわち第２財と第１財の交換比率 $-(q_{21}^d - q_{21})/(q_{11}^d - q_{11})$，$-(q_{22}^d - q_{22})/(q_{12}^d - q_{12})$ に相当する。

3. 購買力平価計測の新しい方法といくつかのモデル

前節で見たように，プラサダ・ラオの命題は，GK 法の世界価格が，ある一定の仮定のもとで得られる，一般均衡価格として解釈できることを示したものであったが，本節では，逆に，一般均衡計算によって，購買力平価を計測することができることを示す。純粋交換を仮定するか，生産を含む一般均衡を仮定するか，効用関数型をどうするか，後者の場合，要素の移動可能性について，どのような仮定を置くかなど，様々な一般均衡モデルを構築することによって，（一般に）それぞれ異なる購買力平価算式（あるいは，むしろ，購買力平価を計測するアルゴリズム）を構成することができる。以下では，網羅的とはいえないが，我々の数値例のもとでの計測結果を示す[8)]。

ここで，各モデルは，次のように，記述される。

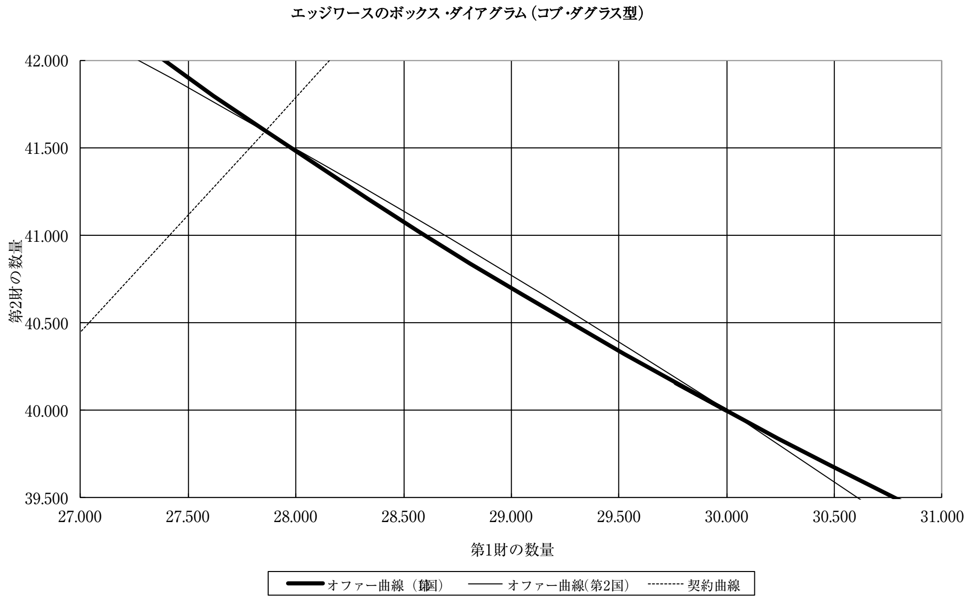

図２　エッジワースのボックス・ダイアグラム（コブ・ダグラス型）

１）効用関数型

１－１）コブ・ダグラス型効用関数

　次の効用関数を仮定する。

$$U(q_{1j}, q_{2j}, \cdots, q_{mj}) = \prod q_{ij}^{\beta_{ij}}, j = 1, \cdots, n$$

パラメーター β_{ij} は，前節で見たように，各国データから（初期保有が消費者均衡になるようにキャリブレートすることによって）

$$\beta_{11} = \frac{1}{3},\ \beta_{21} = \frac{2}{3},\ \beta_{21} = \frac{2}{5},\ \beta_{22} = \frac{3}{5}$$

である。純粋交換ケースは，GK 法である。

１－２）ストーン・ギアリー型効用関数

　線形支出体系（LES）である。効用関数を以下のように与える。

$$U(q_{1j}, q_{2j}, \cdots, q_{mj}) = \prod (q_{ij} - \alpha_{ij})^{\beta_{ij}}, j = 1, \cdots, n$$

本稿の数値例では，最低必要量（committed consumption）を示す行列を次のように設定した。

８）さらに，生産と消費以外の要素（投資，貯蓄，海外）を取り入れることも考えられるし，投資，貯蓄を考慮に入れることは，PPP 計算モデルの現実性を高めるであろう。海外を取り入れることは，PPP 計測事業の地域化を反映することに役立つかもしれない。

表 2　初期保有量と世界価格，PPP

q_{11}	q_{21}	p_1/p_2	ppp	q^d_{11}	q^d_{21}	q^d_{12}	q^d_{22}
300.000	400.000	0.684	0.187	294.915	403.478	55.085	56.522
30.000	40.000	0.747	0.187	27.857	41.600	52.143	58.400
3.000	4.000	0.792	0.187	2.684	4.250	50.316	59.750

$$A=\begin{pmatrix}10 & 25\\ 20 & 30\end{pmatrix}$$

シェア・パラメーターは，各国のデータとA行列から，

$$\beta_{11}=\beta_{12}=0.4,\ \ \beta_{21}=\beta_{22}=0.6$$

とするのが適切であろう。このA行列のもとでは，純粋交換モデルを用いる場合，（第2国基準の第1国の）PPPは，0.1871である。2国基準のLES仮定は，モデルを複雑化せずに，政府部門を導入する便法となるかもしれない。実際，A行列に家計部門の最低必要量に加えて，政府支出要素を組み込むことが考えられる。

1－3）CES型効用関数

一定の代替弾力性をもつ，以下の効用関数を仮定する。

$$U(q_{1j}, q_{2j}, \ldots, q_{mj}) = \left(\sum_i a_{ij} q_{ij}^{\rho_j}\right)^{1/\rho_j},\ \ \sum_i a_{ij}=1, j=1, \ldots, n$$

シグマ・パラメーターすなわち代替弾力性

$$\sigma_j=-\frac{1}{\rho_j-1}$$

について，第1国については，3.000，第2国については，1.500と仮定した。シェア・パラメーターは，計算過程でキャリブレートされる。純粋交換を仮定する場合，（第2国基準の第1国の）PPPは，0.1870である。

ここまでの作業で，GK法結果について一種のロバストネスの存在が印象づけられる。そこで，パラメーターの変更に関する感度分析を実行した。①コブ・ダグラス型効用関数のケース（GK法のケース），②ストーン・ギアリー型効用関数のケース（LESケース），③CES型効用関数のケースである。

まず，①について，第2国の初期保有量を一定とし，第1国における第1財，第2財の初期保有量 q_{11}，q_{21}をそれぞれ3，4に変化させた。また，逆にそれぞれを300，400に変化させた場合を考察した。結果を表2に示す。第1国の初期保有量が大きくなるに従い，相対価格 p_1/p_2はやや低下する。一方，PPPは初期保有量によらず，0.187でほぼ一定であった。

次に，②として，各国経済がストーン・ギアリー型効用関数をもつ場合を考える。当初，第1国における第1財，第2財の最低必要量 α_{11}，α_{21}はそれぞれ10，20とされているが，それらがそれぞれ1，2と小さいとき，また，逆にそれぞれ25，35と大きいときの一般均衡価格およびPPPを計算した。第2国における第1財，第2財の最低必要量 α_{12}，α_{22}はそれぞれ25，30で一定である。

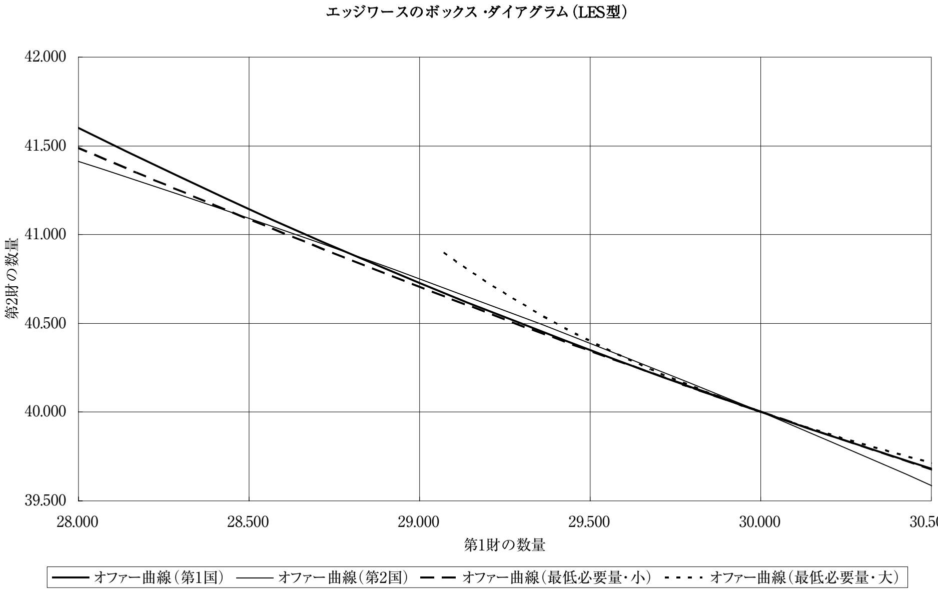

図 3　エッジワースのボックス・ダイアグラム（LES 型）

表 3　最低必要量と世界価格，PPP

α_{11}	α_{21}	p_1/p_2	ppp	q^d_{11}	q^d_{21}	q^d_{12}	q^d_{22}
25.000	35.000	0.778	0.187	29.571	40.333	50.429	59.667
10.000	20.000	0.741	0.187	28.800	40.889	51.200	59.111
1.000	2.000	0.725	0.187	28.451	41.123	51.549	58.877

エッジワースのボックス・ダイアグラムを図 3 に，結果を表 3 に示す。相対価格はボックス・ダイアグラムにおいて，初期保有量を示す点と両国のオファー曲線が交わる点を結んだ傾きであり，最低必要量が大きくなるに従い，やや上昇する。一方，PPP は最低必要量によらず，0.187でほぼ一定であった。

③として，各国経済が CES 型効用関数をもつ場合を考える。当初，第 1 国における代替の弾力性 σ_1を3.000とした。一般均衡価格より計算される PPP のロバストネスを考察するため，次にそれらを2.000，1.001，0.750と小さくし，それぞれの一般均衡価格および PPP を計算した。第 2 国における代替の弾力性 σ_2は1.500で一定である。

エッジワースのボックス・ダイアグラムを図 4 に，結果を表 4 に示す。

相対価格はボックス・ダイアグラムにおいて，初期保有量を示す点と両国のオファー曲線が交わる点を結んだ傾きであり，代替の弾力性が小さくなるに従い，やや上昇する。一方，PPP は代替の弾力性によらず，0.187でほぼ一定であった。

2）生産構造の特定

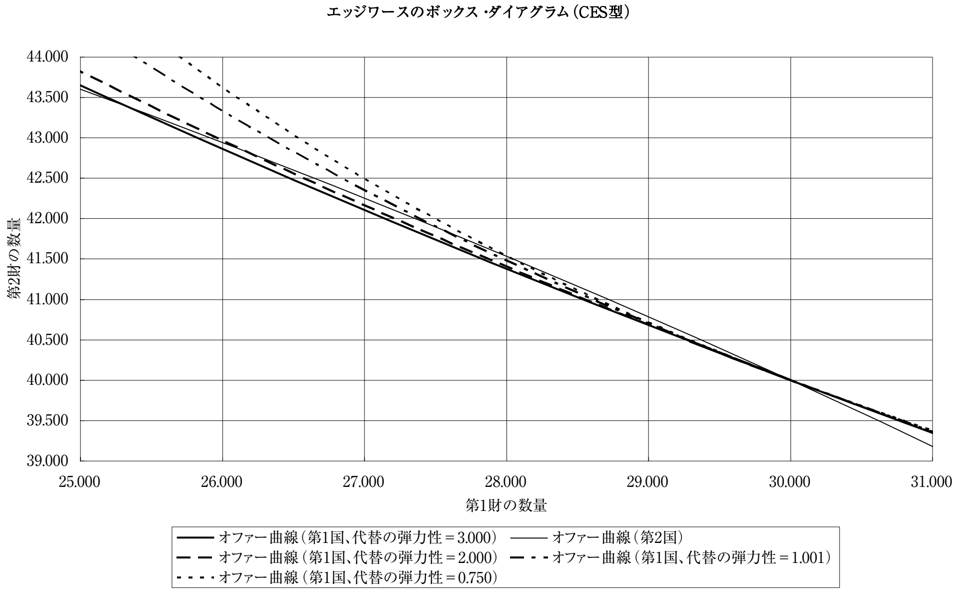

図 4　エッジワースのボックス・ダイアグラム（CES 型）

表 4　代替の弾力性と世界価格，PPP

σ_{11}	σ_{21}	p_1/p_2	ppp	q^d_{11}	q^d_{21}	q^d_{12}	q^d_{22}
3.000	1.500	0.725	0.187	25.315	43.396	54.685	56.604
2.000	1.500	0.738	0.187	26.200	42.804	53.800	57.196
1.001	1.500	0.759	0.187	27.564	41.849	52.436	58.151
0.750	1.500	0.767	0.187	28.034	41.507	51.966	58.493

２−１）本源的投入だけを考慮する場合

このレベルでは，各国で技術が同一であるとする。以下の V 行列の各列は，各活動（第１項目，第２項目），各行は，資本，労働をあらわす。原理的には，本源的投入の移動可能性（mobility）から，４つの場合に分けられる。すなわち，①資本，労働とも移動可能，②資本は移動可能，労働は，移動不可能，③資本は移動不可能，労働は移動可能，④資本，労働とも移動不可能。

$$V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

２−２）中間投入をも考慮する場合

第１国および第２国の中間消費部分については，次の投入係数行列を仮定する。移動可能性によって，２−１）と同様に４つの場合に分けられる。

$$A_1=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.4 & 0.1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$$

本稿における試算では，２－１）で④を仮定する場合，純粋交換ケースとまったく同一の結果が得られた。いずれの結果も，第２国を基準国として第１国の PPP を示したものである。

	PPP
CD	0.1872
CES	0.1870
LES	0.1871

２－２）で④を仮定した場合の計測結果は以下の通りである。

	PPP
CD	0.1862
CES	0.1863
LES	0.1863

既存の購買力平価算式の中には，GK 法と同様に行列整合的であるいくつかの方法が知られている。それらは，本稿で示した線に沿って，純粋交換ケースの一般均衡計算としても，固有値問題(固有ベクトルを求める問題）としても表示できる可能性がある。たとえば，SRK 法（Sakuma et al.［2009］）の世界価格は，次の固有値問題の（固有値１に対応する）固有行ベクトルである。

$$p'Q\widehat{P'Qi}^{-1}P'=p'$$

$y'=p'Q$ が各国の世界価格表示の所得であることに着目すると，金額ベースで表示した各財の需給バランスは，

$$y'\mathrm{B}^{*\prime}=p'\widehat{Qi}$$

で得られることになる。ここで，

$$\mathrm{B}^{*\prime}=\widehat{P'Qi}^{-1}P'\widehat{Qi}$$

である。

同様に，“LES”法（純粋交換でストーン・ギアリー型効用関数を仮定する）の場合に対応する固有値問題は，以下の通りである。

$$p'Q\mathrm{B}^{**\prime}(\widehat{Qi}-\mathrm{A})^{-1}=p'$$

ここで，B^{**}は，アルファ・パラメーターを与えたうえで，各国データを用いてキャリブレートされたベータパラメーターからなる行列である。

各国，各地域の所得を再分配することを含む一般均衡価格計算のための固有値問題は，以下の通りである。再分配行列を D とし，$\tilde{\mathrm{B}}$ をシェア・パラメーターとする。

$$p'QD\tilde{\mathrm{B}}'\widehat{Qi}^{-1}=p'$$

付録　TSP を使った CGE 分析

牧野 好洋

本論では，GK 法で計算される世界価格と，コブ・ダグラス型効用関数をもつ各国経済が純粋交換の仮定のもとに得る一般均衡価格が，同等であることを示した。また同様の仮定のもと，効用関数を変更した場合や，生産を含む一般均衡モデルに拡張した場合の一般均衡価格および PPP を考察した。

付録では，これら一般均衡価格を統計ソフト TSP（Time Series Processor）により算出する手法を整理する。

以下では，２国２財の純粋交換を仮定し，各国経済はコブ・ダグラス型効用関数をもつとする。第 j 国（$j=1, 2$）における第 i 財（$i=1, 2$）の価格をそれぞれ p_{ij}，初期保有量を q_{ij} とする。本論と同様の数値例を用いることとし，第１国における第１財の価格を２，第２財の価格を３とする。同様に第２国における価格はそれぞれ12，13である。第１国における第１財の初期保有量を30，第２財の初期保有量を40とする。同様に第２国における初期保有量はそれぞれ50，60である。世界価格を p_i とする。Sakuma et al.［2004］と同様，第１財の世界価格 p_1 を56とし，第２財の世界価格 p_2 をそれとの比率で示す。

この場合，TSP のプログラムは以下の通りである[9)]。

```
? CGE Approach to the measurement of PPPs
OPTIONS CRT ;
FREQ A ;
SMPL 2015 2015 ;
? Exogenous Variables
CONST P11   2 ;
CONST P21   3 ;
CONST P12  12 ;
CONST P22  15 ;
CONST Q11  30 ;
CONST Q21  40 ;
CONST Q12  50 ;
CONST Q22  60 ;
CONST P1   56 ;
? Parameters
```

9）効用関数を変更した場合，生産を含む一般均衡モデルに拡張した場合も，TSP のプログラム，出力は同様である。

```
13  beta 1 = (P11＊Q11)/(P11＊Q11+P21＊Q21);
14  beta 2 = (P12＊Q12)/(P12＊Q12+P22＊Q22);
 ? Equations
15  IDENT F001  QD11=      beta1  ＊(1/P1)＊(P1＊Q11+P2＊Q21);
16  IDENT F002  QD21=(1-beta1)＊(1/P2)＊(P1＊Q11+P2＊Q21);
17  IDENT F003  QD12=      beta2  ＊(1/P1)＊(P1＊Q12+P2＊Q22);
18  IDENT F004  QD22=(1-beta2)＊(1/P2)＊(P1＊Q12+P2＊Q22);
19  IDENT F005  P1    =(P1＊QD11+P1＊QD12)/(Q11+Q12);
 ? Solve
20  SIML (Static, Noprnsim, Tag=z,
20       ENDOG=(QD11, QD21, QD12, QD22, P2), Maxit=100, Tol=0.001)
20                  F001, F002, F003, F004, F005;
 ?  PPP
21  PPP1=(P11＊Q11+P21＊Q21)/(P1＊Q11+P2z＊Q21);
22  PPP2=(P12＊Q12+P22＊Q22)/(P1＊Q12+P2z＊Q22);
23  PPP=PPP1/PPP2;
24  Pr   =P1/P2z;
 ?  Output
25  PRINT P1, P2z, Pr;
26  PRINT PPP1, PPP2, PPP;
27  PRINT QD11z, QD12z;
28  PRINT QD21z, QD22z;
29  PRINT P11, P12;
30  PRINT P21, P22;
31  PRINT Q11, Q12;
32  PRINT Q21, Q22;
33  END;
```

コマンド1～3はTSPにおける設定である。本稿の価格や数量は数値例であるが，プログラム上，2015年の年次データとする。コマンド4～12は各国における価格，初期保有量，基準となる世界価格を与える。コマンド13，14はコブ・ダグラス・シェアパラメーターを求める。

コマンド15，16はある世界価格のもと，第1国で生じる第1財，第2財の需要量を求める。同様にコマンド17，18は第2国で生じる第1財，第2財の需要量を求める。コマンド19は第1財の需給均衡を示す。ワルラスの法則より，第2財の需給均衡をモデル体系より外す。

コマンド20は，コマンド15～19が定義する5本の方程式をニュートン法により解く。内生変数は第j国（$j=1,2$）における第i財（$i=1,2$）の需要量q^d_{ij}，および第2財の世界価格p_2である。区別のため，計算の結果得た変数にはタグzをつける。

コマンド21，22は第j国（$j=1,2$）における集計されたレベルのPPPを，コマンド23は第2国を基準とするPPPを求める。また，コマンド24は世界価格の相対価格p_1/p_2を求める。

コマンド25～32は結果の出力である。

上記のTSPのプログラムは，以下を出力する。

P 1 =	56.00000		
	P 2 Z		
2015	75.00000		
	PR		
2015	0.74667		
	PPP 1	PPP 2	PPP
2015	0.038462	0.20548	0.18718
	QD11Z	QD12Z	
2015	27.85714	52.14286	
	QD21Z	QD22Z	
2015	41.60000	58.40000	
	P11	P12	
Value	2.00000	12.00000	
	P21	P22	
Value	3.00000	15.00000	
	Q11	Q12	
Value	30.00000	50.00000	
	Q21	Q22	
Value	40.00000	60.00000	

第１財の世界価格 p_1は基準であり56，第２財の世界価格 p_2は75である。その相対価格 p_1/p_2は0.747である。第１国の PPP は0.038，第２国の PPP は0.205であり，後者を基準とする PPP は0.187である。

第１国は初期に第１財を30保有するが，その需要量 q^d_{11}は27.857であり，2.143を第２国に供与する。第２国は初期に第１財を50保有するが，その需要量は52.143である。

一方，第１国は初期に第２財を40保有するが，その需要量 q^d_{21}は41.600であり，1.600は第２国より供与される。第２国は初期に第２財を60保有するが，その需要量は58.400である。

第２財と第１財の交換比率は1.600／2.143であり，世界価格の比率0.747に等しい。

参考文献

Kurabayashi, Yoshimasa and Itsuo Sakuma［1990］*Studies in International Comparisons of Real Product and Prices*, Kinokuniya, Tokyo.

Prasada Rao, D.S.［1985］"A Walrasian Exchange Equilibrium Interpretation of the Geary-Khamis International Prices," paper presented at the19th General Conference of the International Association for Research in Income and Wealth, Noordwijkerhout, Netherlands, 26–31 August 1985.

Sakuma, Itsuo, D. S. Prasada Rao, Osamu Ichioka, and Yoshimasa Kurabayashi［2004］"A CGE approach to the measurement of PPPs," paper presented at the 28th General Conference of the International Association for Research in Income and Wealth, Cork, Ireland, August 22–28, 2004.

Sakuma, Itsuo, D. S. Prasada Rao and Yoshimasa Kurabayashi［2009］"Additivity, Matrix Consistency and a New Method for International Comparisons of Real Income and Purchasing Power Parities" in D. S. Prasada Rao（ed.）Purchasing Power Parities of Currencies: Recent Advances in Methods and Applications, Edward Elgar, pp.142–159.

倉林義正・作間逸雄［1981］「倉林義正・作間逸雄「『購買力平価』概念とその測定―GDP 国際比較の観点から―」『専修経済学論集』，16（１），pp.37–64。

作間逸雄［1989］「購買力平価測定の現状と課題（特集勤労者生活の国際比較）」『日本労働協会雑誌』，31（7），pp. 54–64。