Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 50, No. 1, 1-21, 2015

世代重複遺贈経済における周期解*

中島　巖**

＜要約＞

Gale は，一定の成長率で増加する世代が重複していく経済における純粋交換の効率性とその動学を検討した。後に，世代重複モデルと呼ばれる理論枠組の先駆を成す作業であった。

しかるに，世代重複経済モデルは，１つには，国債その他の形態の資産，さらに，遺贈，贈与を含む経済の効率性の議論のための枠組として，もう１つは，動的経路の(不)安定性ないし振動性･循環性の議論のための枠組として適用されていくことになる。

予測不能な外的ショックに起因する動的経済の変動とは別に，かかるショックが作用しない確定的動的経済において，カオスと呼ばれる変動が生じ得る。

(非線型)動的経済体系のカオス的行動としての周期的行動の分析は，［Sarkovskii 定理］，［Li＝Yorke 定理］の適用を通じて発展化をみた。

以下では，まず，２期間生存する若年期，老年期のライフ･サイクルをもち，それぞれの期における消費に至福点が存在する文脈の中で，選択対象となる資産の価格経路が周期解をもつ可能性をみる。かかる至福点の存在は，贈与を構成する要因の１つに位置づけることもできる。

次に，２期間生存する世代が重複していく経済の文脈の中で，各世代が次世代に対する利他的な遺贈行為を展開する遷移的経済において，各世代の代表的個人の消費の時間経路が周期解をもつ可能性をみる。

JEL 区分：E３，E32
キーワード：遺贈，世代重複，周期解

＊本文中の Sarkovskii の綴り方は，ロシア語正字法によれば Sharkovskii とすべきであろうが，本稿では慣例にしたがい前者を採用する。

＊＊専修大学名誉教授

序

学術用語としての「カオス」(chaos) は，1974年に数理生態学者 R. M. May〔12〕によって最初に用いられたごとくであるが，広く定着化するようになったのは1975年の Li＝Yorke〔11〕に用いられてからである。

しかるに，その基本アイディアは，当時ソ連邦ウクライナ共和国のキエフの Sarkovskii〔19〕が1964年に定理化したそれであったが，Li＝Yorke, *op. cit.,* の刊行以前には西側数学者の知るところとなっていなかった。(厳密な証明は，1986年の Devaney〔 6 〕まで待たなければならなかった。)

Li＝Yorke の議論は，一次元 (one-dimensional) ケースに限定され，３周期解が存在すれば，すべての自然数 m を周期とする周期解が存在するというもので Sarkovskii 定理に対応する。同作業が“period three equals chaos”と命名され，そこでの帰結としての Li＝Yorke 定理が Sarkovskii 定理の系 (corollary) と位置づけられる所以である。

Li＝Yorke の議論は，カオス的動学 (chaotic dynamics) への発展化をみるが，カオス的動学 (遡れば，「カオス」自体) の定義をめぐって，カオスないし分岐が生じている。(Li＝Yorke 定理を支持するカオス的動学の立場として，例えば，Day〔 5 〕参照。)

ところで，Gale〔 9 〕は，一定の成長率で増加する世代重複的な主体間での純粋交換のあり方とその動学を検討した。(未だ，世代重複 (overlapping generations) なる用語は登場していない。) それに先立つ1958年における Samuelson〔18〕の純粋「消費ローン」モデル (pure ‘consumption-loan’ model) は，Meckling〔14〕, Cass＝Yaari〔 4 〕, Diamond〔 7 〕, Thompson〔23〕, Shell〔20〕, Starret〔22〕等の同調者を生むが，そこでの中心的関心は，世代重複から生ずる資源配分の効率性 (Pareto 最適性) にあった。

世代重複経済モデルに対するもう一つの関心は，経路の不安定性ないし振動性の可能性に関するそれであった。Benhabib＝Day〔 2 〕は，世代間取引がネットで正であり，実現可能であっても，カオス性を呈する可能性，すなわち，カオス的経路の発生可能性を検討した。

すでに示唆した Samuelson, *op. cit.,* の示唆にしたがって，Diamond, *op. cit.,* は，世代重複モデルに国債 (national debt) を取込み，そこでの効率性を検討した。国債その他の資産形態とは別に，遺贈 (bequest)，贈与 (gift) を世代重複モデルに取込む試みも重ねられた。(例えば，Drazen〔 8 〕, Burbidge〔 3 〕, Abel〔 1 〕, Laitner〔10〕, Nerlove＝Razin＝Sadka〔15〕, O’Connell＝Zeldes〔16〕等参照。)

さて，本稿における我々の目的は，遺贈を含む世代重複経済における消費経路の動学をみることにある。まず，次節では，ロジスティック函数を適用し，カオス的経路が発生する過程をみた後に，静態的贈与モデルと構造を同じくする，ライフ･サイクル･モデル (life cycle model) の文脈の中で，消費の至福点 (bliss points) をもつときの資産価格経路のあり方をみ，［Sarkovskii 定理］が妥当する過程をみる。

第２節では，２期間生存する主体から成る世代重複経済において，各世代の老年者が次世代に利他的動機によって残す遺贈のあり方をみた後に，前世代からの遺贈を受取る世代の消費経路のあり方を次世代への遺贈水準を所与としたところでみ，［Li＝Yorke 定理］が妥当する可能性をみる。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第１節　　Sarkovskii 定理と資産価格経路

1．Sarkovskii 定理——予備的考察

本節では，非線型経済の資産価格のカオス的行動のあり方をみる。

まず，本項では，非線型体系の周期的軌道の解明にとって中心概念を成す［Sarkovskii 定理］を概観する。[1)]

経済変動ないし景気循環の分析に際して２つの接近法が適用されてきた。第１は，実物景気循環論アプローチ（real business cycle approach）である。実物循環は，選好，賦存量，土地作柄等の変化から生じ得るとされ，確率的モデルが用意され，上の変数の変化は，予測不能な外的ショックに起因するとされる。そこでは，外的ショックが経済に居残り，規則的波動を生み出すメカニズムに対し主たる関心が向けられる。

第２の接近法は，サンスポット論（sunspot theories）である。サンスポットの命名は，19世紀に流行をみた景気循環論に因むものである。現代的サンスポット論は，確率的ショックをともなう経済をベースとする。経済には，人々が経済変動の決定要因として重要であると考える変数群があり，しかも，それは十分なデータが取得可能なそれである。

個々人は，自らの行動の決定に際し，これら変数群を使用する。人々が，景気循環を引起こすと信ずる変数群は，人々がそれに反応してしまうため，現実に循環を引起こすことになり，そこでの経済には予測のベースとなる変数群と同一期間をもつ循環が生起する。現代的サンスポット論は，たとえ，直接的関連がみとめられなくとも，多くの人がサンスポットが景気循環を引起したと信じたならば，それが現実となる可能性を示唆している。

しかるに，外的確率的ショックが作用しない確定的経済において経済変動が生じ得る。かかる経済に適用されるモデルを解く数学は，カオス理論（chaos theory）と呼ばれるそれである。

さて，カオス理論を概観するために，原ロジスティック差分方程式

$$x_{t+1}=f(x_t,\lambda)=\lambda x_t(1-x_t),\quad 0\leq\lambda\leq 4 \tag{1}$$

を想定しよう。[2)]このとき，x は閉区間$[0,1]$内に位置しなければならない。この制約は，λ の値に上限を設定する。

いま，f を最大化する x の値を求める。

$$f'(x)=\lambda-2\lambda x=0 \tag{2}$$

から，$x=\dfrac{1}{2}$がしたがう。直ちに，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\lambda}{4}$となる。しかるに，$x$ は１を越えることができないから，λ は４を越えることができない。したがって，原ロジステック方程式は，$0\leq\lambda\leq 4$に対して定義される。

ここで，均衡点 $x_{t+1}=x_t=x^*$を求めよう。

$$x^*=\lambda x^*(1-x^*) \tag{3}$$

$$\text{or} \quad x^*[\lambda x^* + (1-\lambda)] = 0 \tag{4}$$

から

$$x^* = 0 \qquad \text{or} \qquad x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{5}$$

がしたがう。これらの均衡解の安定性をみるために，線型近似を施せば

$$x_{t+1} = f(x^*, \lambda) + f'(x^*, \lambda)(x - x^*) \tag{6}$$

がしたがう。

しかるに，$f(x^*, \lambda) = 0$，あるいは，$f(x^*, \lambda) = (\lambda - 1)/\lambda$，かつ$f'(x^*, \lambda) = \lambda - 2\lambda x^*$であるから

$$f'(x^*, \lambda) = \begin{cases} \lambda \quad \text{for} \quad x^* = 0 \\ \\ 2-\lambda \quad \text{for} \quad x^* = \dfrac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases} \tag{7}$$

を得る。

まず，$x^* = 0$を考える。(6)式から，直ちに

$$x_{t+1} = \lambda x_t \tag{8}$$

がしたがい，初期点x_0に対し，解

$$x_t = \lambda^t x_0 \tag{9}$$

がしたがい，$0 < \lambda < 1$なるλに対して安定解となる。

次に，$x^* = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$を考える。(6)式から

$$x_{t+1} = x^* + (2-\lambda)(x_t - x^*) \tag{10}$$

$$\text{or} \quad u_{t+1} = (2-\lambda) u_t \tag{11}$$

がしたがう。ただし，$u_{t+1} = x_{t+1} - x^*, u_t = x_t - x^*$である。直ちに，初期点$u_0$に対し，解

$$u_t = (2-\lambda)^t u_0 \tag{12}$$

がしたがい，$|2-\lambda| < 1$，ないし$-1 < 2-\lambda < 1$，すなわち，$1 < \lambda < 3$なるλに対し，安定解となる。しかるに，解x^*は，λの値に依存する。いま，$x^*(\lambda)$と表わせば，$x^{*\prime}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} > 0$，$x^{*\prime\prime}(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda} < 0$がしたがい，$x^*(\lambda)$は，$\lambda = 1$から出発して$\lambda$とともに逓減的に増加する曲線を与える。

ここで，いくつかの定義を確認しておく。

いま，領域$I = [0, 1]$に定義される連続函数をfとし，差分方程式$x_{t+1} = f(x_t)$を考え，fをk回反復する写像をf^kとする，すなわち

$$f^k(x) = f(f^{k-1}(x)), \quad k = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

を定義する。このとき，xをfによってk回反復したとき，当初のxに戻るような点，すなわち

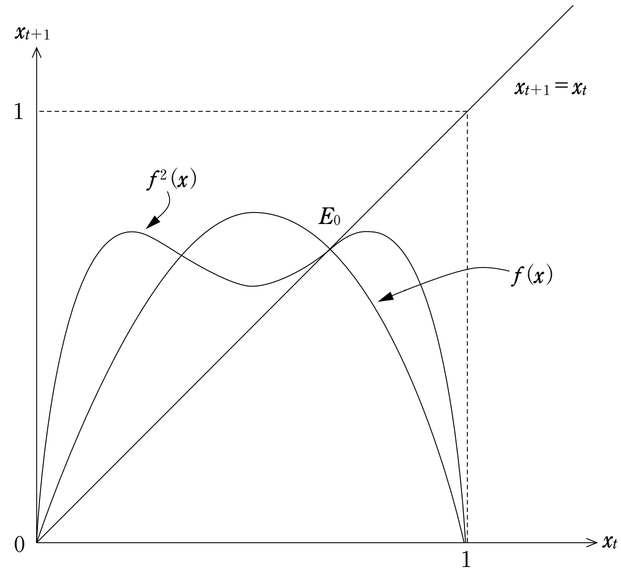

図-1

$$x=f^k(x),\ \ x\neq f^j(x),\ \ j=1,2,\cdots,s-1 \tag{14}$$

を満たす点は，k 周期解と呼ばれる。直観的には，$f^k(x)$のグラフが $x_{t+1}=x_t$ を満たす対角線を截る点の x 座標が k 周期解（k-period point）と呼ばれる。

直観的に言えば,$f^k(x)$が対角線,すなわち45°線と交わる点の x 座標が k 周期解となる。因みに，3 周期解とは，$f^3(x)$が $x_{t+1}=x_t$ に交わるそれとなる。

次に，周期解の安定性は,$[f^k(x)]'$，すなわち，k 周期解 x_1^*,x_2^*，$\cdots,x_k^*$について

$$[f^k(x)]'=f'(x_1^*)f'(x_2^*)\cdots f'(x_k^*) \tag{15}$$

を計算すればよい。例えば，x_1^*,x_2^*を $f^2(x)$の周期解とするとき，

$$|[f'(x)]'|=|f'(x^*)f'(x_2^*)| \tag{16}$$

がしたがい，かつ

$$|f'(x_1^*)f'(x_2^*)|<1 \tag{17}$$

が満たされるならば，２周期解 x_1^*,x_2^*は漸近安定的（asymptotically stable）となる。他のすべての場合についても，同様に安定性定理がしたがう。

以上の準備の下に，上のロジスティック差分方程式の周期解の性質を確かめてみよう。

いま，解 $x^*=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$について，$\lambda=3$ の場合を想定する。直ちに，$x^*=\dfrac{2}{3}$，かつ(7)式から$f'(x^*=\dfrac{2}{3},\lambda=3)=2-3=-1$がしたがい，$x^*=\dfrac{2}{3}$は半安定（semistable）となる。**図-1**におけるごとく，f の周期 2 の周期解 x，すなわち，２周期解$f^2(x)$が E_0点で45°線と接することから上の結果がしたが

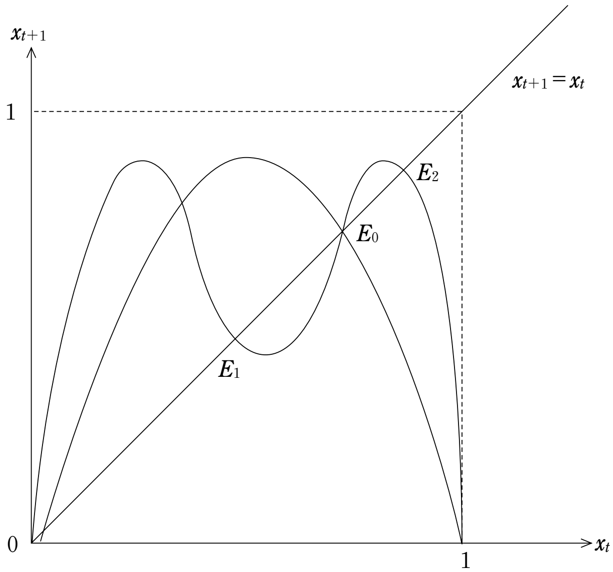

図-2

う。

また，$0<\lambda=0.8<1$とすると，$f(x)$，$f^2(x)$のいずれも45度線には届かず原点を共有するのみとなり，したがって，$0\leq\lambda\leq1$なるλに対し，$x^*=0$がしたがう。

次に，$\lambda=3.4>0$と設定すると，**図-2**におけるごとく，$f^2(x)$が，$\lambda=3$の場合に比して，より急峻な凸部分と，より深い凹部分をもち，$f(x)$と$f^2(x)$が交わる点$E_0=0.70588$に加えて，E_1,E_2のさらなる２つの解がしたがう。このとき，E_0に対応する解x_0^*において，$f^{2\prime}(x_0^*)=1.96>1$がしたがう。$E_0,x_0^*$は不安定となる。しかるに，

$$E_1:x_1^*=0.451963\quad f'(x^*,\lambda)=-0.76$$
$$E_2:x_2^*=0.842154\quad f'(x^*,\lambda)=-0.76$$

がしたがい，$f^{2\prime}(x_1^*)=f^{2\prime}(x_2^*)=-0.76$となるから，(17)式から，$E_1,E_2$は安定的となる。このとき，$\lambda=3$は，一意解と２周期解とへの分割化の出発点となり，$\lambda=3$は熊手型分岐（pitchfork bifurcation）ないし倍周期分岐（period-doubling bifurcation）を構成する。

以上から**図-3**がしたがう。[3)]

ところで，ある体系がみせるカオス的行動（chaotic behavior）とは，当該体系が確定的なそれであるにも関らず，そこから生み出される規則的循環をもたないランダム行動（random behavior）を指す。上のロジスティック差分方程式体系は，λの値に依存して様々な均衡解をもたらす。２周期解，３周期解，４周期解，８周期解がしたがうごとくである。

さて，上で展開された議論を背景として，非線型体系の周期的軌道（periodic orbit）の分析にとって最重要な［Sarkovskii 定理］の意義を概観しておこう。

いま，１から30までの整数列を奇数，$2^k\times$奇数$(k=0,1,\cdots)$，次元低下順のベキによって表現し直す数表が**表-1**に示される。表現し直されない整数列に対し，Sarkovskii は，**表-2**におけるごとき順序列を適用する。このとき，Sarkovskii 順序（Sarkovskii ordering）は，

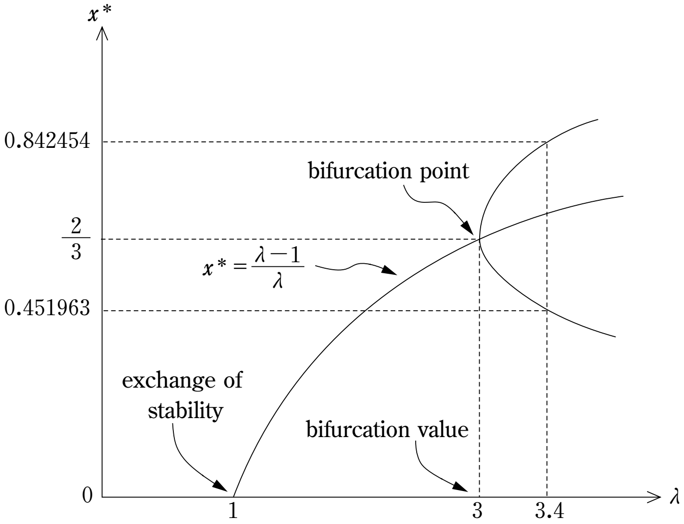

図-3

$$S_0 > S_1 > S_2 > \cdots > S_k > \cdots\cdots > 2^4 > 2^3 > 2^2 > 2^1 = 2 > 2^0 = 1$$

で与えられる。ただし，$a > b$ は，順序において a は b に優先することを意味し，そこでの奇数とは，１を除いた奇数を指す。

上の Sarkovskii 順序によれば，３が最高位にあり，次に，小さい順序に（正の）奇数が並び，その次に，それまでの奇数に 2^k を乗じたものが並び，最後に 2 のベキ解 2^k が大きな数から並び，$2^0 = 1$ が最低位に位置することになる。

さて，［Sarkovskii 定理］は，次のごとく主張する。

［Sarkovskii 定理］

閉領域 $I = [a, b]$ 上に定義され，最初の期間 n で周期解をもつ $f : I \to I$ なる連続函数 f を考えるとき，Sarkovskii 順序において $n > m$ ならば，f は，また最初の m 期間で周期解をもつ。

上の Sarkovskii 順序の下で，周期 1 の解が定常解となり，それ以外で最も存在し易い周期解が 2 周期解で，最も存在し難い周期解が 3 周期解であることになる。

項を改めて，［Sarkovskii 定理］の意義をライフ･サイクル･モデルの文脈の中で確かめよう。

2. 資産価格経路と Sarkovskii 定理

本項では，確定的なライフ･サイクル･モデルにおける多数，非定常均衡の成立可能性と［Sarkovskii

定理］の関係をみる。[4)]

すでに示唆したごとく，サンスポット均衡は，確率的要因が作用する経済に最も妥当する概念である。しかるに，確定的な経済の文脈の中でサンスポット均衡をもつ経済に最も近いのは，多数，非定常均衡（multiple, nonstationary equilibria）をもつそれである。以下では，周期解をもち得る特異な選好をもつ経済を想定する。

いま，世代 t の個人は2期間生存し，その効用函数が若年期，老年期のある特定の消費点において至福点（bliss point）をもつものとする。すなわち，個人 h の効用函数は

$$u_t^h = -(c_0^h(t) - b^Y)^2 - \beta(c_1^h(t+1) - b^0)^2 \tag{18}$$

で表わされるものとする。ただし，$c_0^h(t), c_1^h(t+1)$，および b^Y, b^0は，それぞれ若年期，老年期の消費量，至福点である。このとき，b^Y, b^0は最適消費量であり，そこからの乖離は，その2次函数として効用を低下させることになる。(18)式に対応する効用曲面からしたがう無差別曲線群は，同心円状の等高線をもつ。

ところで，上の効用函数が2財に対して定義されるものとみなせば効用局面，無差別曲線群における至福点以上の領域は，静態的視野の中で贈与（gift）の発生可能性をもつ領域である。同領域にある消費点から財を減少させることによって至福点に近づき得る。消費点から至福点への減少化部分が贈与を構成する。[5)]もし，２人の個人の一方ないし双方が相互依存的効用（interdependent utility）をもつならば，内生的に同様の至福点が現出する。[6)]

さて，個人 h の若年期，老年期における初期賦存（initial endowments）が至福点以下の水準にあるとき，上の効用函数の下で効用最大化の問題が発生する。

いま，個人 h は，若年期に初期賦存の下で，貯蓄と資産形成を行ない，その残りを消費し，老年期に初期賦存と貯蓄(貸出)からの利息と資産評価額の合計を消費する。ただし，資産は無限に収益をもたらし続ける無限資産（infinitely lived asset）であるものとする。例えば，土地は，その例となる。地価評価額に加えて生産作柄の収益をもたらす可能性がある。

このとき，若年期，老年期のそれぞれの予算制約式

$$c_0^h(t) = w_0^h(t) - s^h(t) - p(t)a^h(t) \tag{19}$$

$$c_1^h(t+1) = w_1^h(t+1) + (1+r(t))s^h(t) + [p(t+1) + d(t+1)]a^h(t) \tag{20}$$

がしたがう。ただし，$w_0^h(t), w_1^h(t+1)$は，若年期，老年期の初期賦存であり，$s^h(t)$は貯蓄(貸出)，$1+r(t)$は利子因子，$a^h(t)$は無限資産量である。さらに，$p(t), p(t+1)$ は，資産価格経路を表わし，$d(t+1)$ は資産収益率を表わす。

(19), (20)式から，直ちに，生涯予算制約式（lifetime budget constraint）

$$c_0^h(t) + \frac{c_1^h(t+1)}{1+r(t)} = w_0^h(t) + \frac{w_1^h(t+1)}{1+r(t)} - a^h(t)\left[p(t) - \frac{p(t+1)+d(t+1)}{1+r(t)}\right] \tag{21}$$

がしたがう。

ところで，資産一般に対する需要 $b^h(t)$は，資産価格と利子因子の大小に依存する。すなわち

$$b^h(t)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad 1+r(t)>\dfrac{1}{p(t)} \\ \infty & \text{if} \quad 1+r(t)<\dfrac{1}{p(t)} \\ b^{h*}(t) & \text{if} \quad 1+r(t)=\dfrac{1}{p(t)} \end{cases}$$

がしたがう。$1+r(t)>(<)\dfrac{1}{p(t)}$のとき，需要量は$0(\infty)$となり均衡たり得ず，$1+r(t)=\dfrac{1}{p(t)}$が均衡条件とならなければならない。上の関係を$p(t)=\dfrac{1}{1+r(t)}$と変形すれば，割引現在価値と価格の均等化を意味し，かかる条件は，現在価値条件（present value condition）と呼ぶことができる。

しかるに，上の無限資産に対しては，現在価値は$(p(t+1)+d(t+1))/(1+r(t))$に相当するから現在価値条件は

$$p(t)=\frac{p(t+1)+d(t+1)}{1+r(t)} \tag{22}$$

と表現される。(22)式は，同時に，貸出･借入市場の均衡条件を構成している。このとき，上の生涯予算制約式((21))式の最右辺は，ゼロに等しくならなければならず，生涯予算制約式は

$$c_0{}^h(1)+\frac{c_1{}^h(t+1)}{1+r(t)}=w_0{}^h(t)+\frac{w_1{}^h(t+1)}{1+r(t)} \tag{23}$$

と表現し直される。

以上から，個人 h の問題は，

$$\max_{s^h(t)} u_t{}^h=-(c_0{}^h(t)-b^Y)^2-\beta(c_1{}^h(t+1)-b^0)^2$$

$$s.\ t.\quad c_0{}^h(t)+\frac{c_1{}^h(t+1)}{1+r(t)}=w_0{}^h(t)+\frac{w_1{}^h(t+1)}{1+r(t)} \tag{24}$$

と表現される。

直ちに，上の効用最大化問題を解く貯蓄(貸出)が満たすべき 1 階条件

$$2(c_0{}^h(t)-b^Y)-2\beta(c_1{}^h(t+1)-b^0)(1+r(t))=0 \tag{25}$$

がしたがう。

ここで，(25)式の $c_0{}^h(t), c_1{}^h(t+1)$ に，(19), (20)式を代入し整理すれば，

$$s_0{}^h(t)=\frac{(w_0{}^h(t)-b^Y)-\beta[w_1{}^h(t+1)(1+r(t))-b^0]}{1+\beta(1+r(t))^2} \tag{26}$$

がしたがう。(26)式は，貯蓄(貸出)函数を与えている。

しかるに，集計貯蓄(貸出)は，均衡化において，すべての期間を通じて資産価額に均等化しなければならないから，総人口$N(t)$，総資産量Aに対し

$$S_0{}^h(r(t))=N(t)s_0{}^h(t)=p(t)A,\ \text{for all}\ t \tag{27}$$

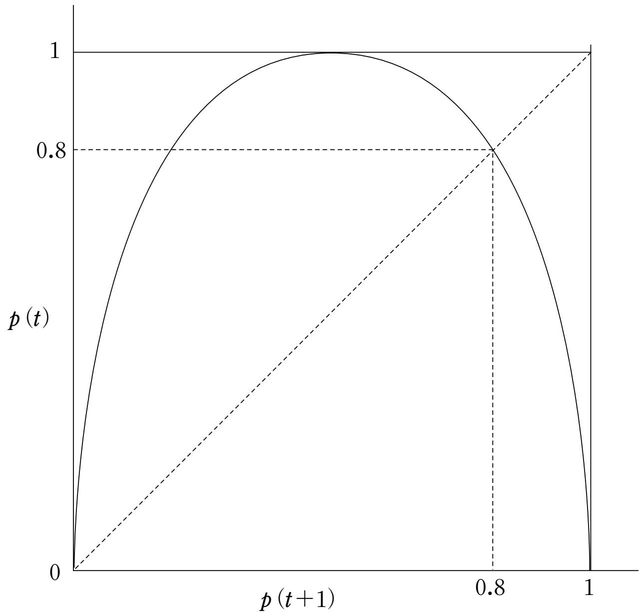

図-4

がしたがわなければならない。

ここで，議論の具体化のために，賦存量ベクトル$(w_0{}^h(t), w_1{}^h(t+1))=(2,1)$，至福点ベクトル$(b^Y, b^0)=(2,2)$と特定化しよう。[7]直ちに，(24)式は，

$$s_0{}^h(t)=\frac{\beta r(t)}{1+\beta(1+r(t))^2} \tag{28}$$

と簡単化される。

さて，ここで，$p(t)$を$p(t+1)$ の函数として解き

$$p(t)=f(p(t+1)) \tag{29}$$

で表わそう。いま，上の個人貯蓄函数((24)式)を集計貯蓄函数((26)式)に代入し，$N(t)=100$，$A=100$と特定化し，利子因子を現在価値制約条件((22)式)に置き換えれば，$p(t)=f(p(t+1))$ の函数fは

$$p(t)=[\beta(p(t+1)+d(t+1))-\beta(p(t+1)+d(t+1))^2]^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

で表わされる。ここで，簡単化のために$d(t+1)=0$と設定し，$\beta=4$と特定化すれば，(30)式は，さらに，

$$p(t)=[4(p(t+1))-4(p(t+1))^2]^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

と表現し直される。(31)式から，$p(t)=p(t+1)=p^*$なる定常解は，

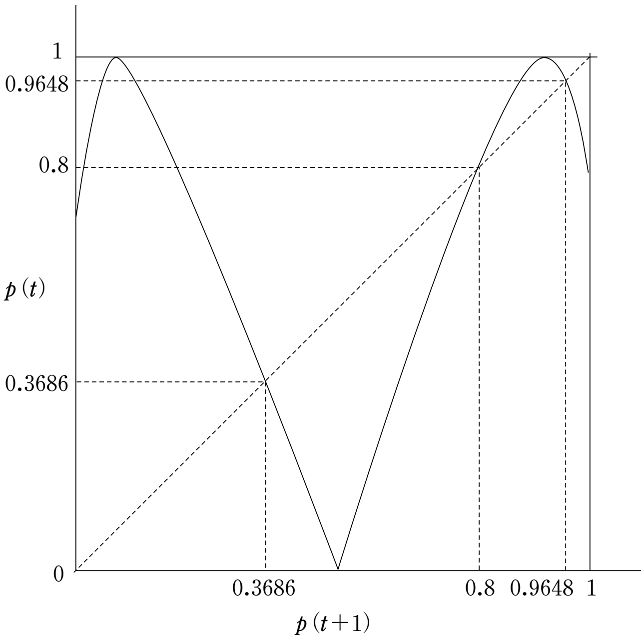

図-5

$$p^*\left(p^*-\frac{4}{5}\right)=0 \tag{32}$$

を満たし，$p^*=0$ と $p^*=0.8$がしたがう。(**図-4**参照。)

次に，$p(t)=p(t+2)\,(p(t)\neq p(t+1))$なる定常均衡を探すことによって２周期循環（two-period cycles）を探すことにする。合成函数g^2を用いれば

$$p(t)=f(f(p(t+2)))=g^2(p+2) \tag{33}$$

がしたがう。ベキの２は，合成函数g^2が函数fを２回適用することによって得られる合成函数であることを意味している。

このとき，$p(t)=0.8$に加えて，$p(t)=p(t+2)=p^*=0.3686$と$p(t)=p(t+2)=p^*=0.9648$がしたがう。前者の価格から出発すれば，価格の均衡時間経路は

$$\begin{aligned}
&p(1)=0.3686\\
&p(2)=0.9648\\
&p(3)=0.3686\\
&p(4)=0.9648\\
&p(5)=0.3686\\
&p(6)=0.9648\\
&\quad\quad\vdots
\end{aligned}$$

となり，２周期循環が生ずるごとくである。(**図-5**参照。)

ここで，上の２周期循環が発生する過程を確かめよう。**図-6**において，$p(1)=0.3686$と整合す

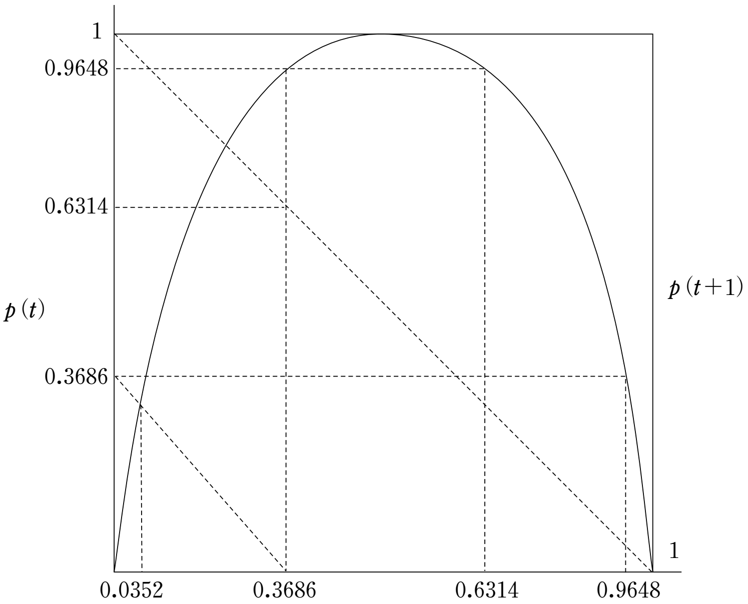
1
0.9648
0.6314
p(t)
0.3686
p(t+1)
1
0.0352
0.3686
0.6314
0.9648

図-6

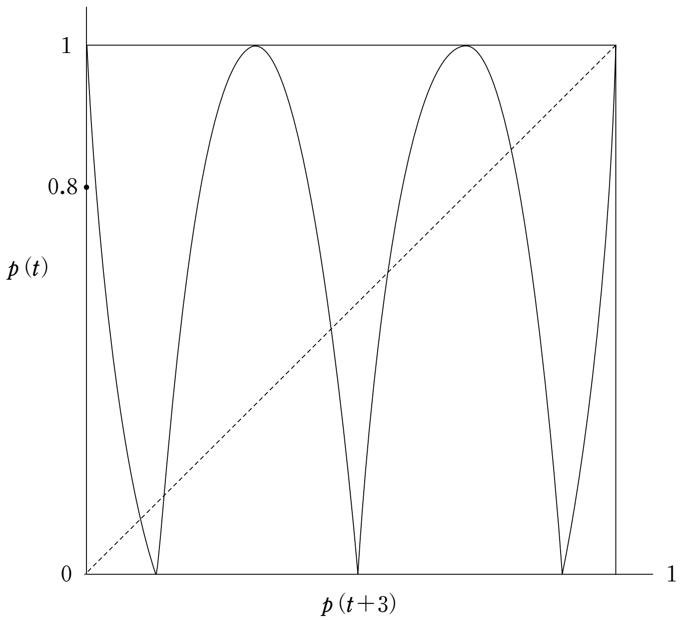
1
0.8
p(t)
0
1
p(t+3)

図-7

る $p(2)$ の値は２つあり，$p(2)=0.9648$ と $p(2)=0.0352$ である。前者が，上の２周期循環を発生させる。0.9648に等しい $p(1)$（ないし，同じ値の $p(2)$）は，0.3686に等しい $p(2)$（ないし $p(3)$）を結果する。このとき，２周期循環が発生する。しかるに，0.6314に等しい $p(2)$ が結果するとき，価格経路の行方は予断し難い。

最後に，函数 f を３回適用してみよう。合成函数 g^3 を適用すれば

$$p(t)=f(f(f(p(t+3))))=g^3(p(t+3)) \tag{34}$$

がしたがう。上と同様の手続きを適用すれば，０と0.8において定常均衡とならない $p(t)=p(t+3)=p^*$ を満たす６つの p^* が存在する。（**図-7**参照。）

以上から，函数 $f:R\rightarrow R$ が連続で３周期解をもつならば，f は他のいかなる周期性をもつ解をとる可能性が至福点をもつ個人の効用函数が妥当する場合について確認された。しかるに，かかる帰結は[Sarkovskii 定理]が主張する帰結である。同定理は，もし，人々がそうなることを周知，期待するならば，任意の周期性をもつ景気循環が発生する可能性を含意するものとなる。

1）本項の議論として，Rosser, Jr.〔17〕, Shone〔21〕, Vialar〔24〕等参照。
2）以下の議論は，本質的に，Shone, *op. cit.,* に負う。
3）最初の分岐点（bifurcation point）を安定性の交換（exchange of stability）と言う。
4）本項の議論は，本質的に，McCandless, Jr.＝Wallace〔13〕に負う。
5）かかる至福点の存在から贈与発生可能性を説く議論は，古代ギリシャ哲学者 Aristoteles の中庸原理（principle of moderation）に由来する。
6）効用の相互依存性から贈与発生可能性を説く議論は，キリスト教的愛（agape）に由来する。
7）この特定化は，McCandless, Jr.＝Wallace, *op. cit.,* に準ずる。

第２節　利他的世代重複経済と消費経路

1．世代重複経済と遺贈

本節では，２期間生存する同質な主体から成る世代重複経済において，生産のない初期賦存に拠る純粋交換の下で各世代が次世代に対し利他的な遺贈動機をもつところでの経済の動学をみる。

本項では，純粋交換経済における次世代に対する利他的な遺贈行為のあり方をみる。

さて，有限の寿命をもつ多数の同質な主体が世代重複を展開していく人口成長率ゼロの経済を想定し，そこでは，各世代が次世代に対し利他的（altruistic）であり遺贈（bequest）を残していくものとする。[8)]

いま，世代 t の代表的個人は，若年期に $w_0(t)$，老年期に $w_1(t+1)$ の初期賦存をもつものとする。ここで，それぞれ時間を通じて一定であるものとし w_0, w_1 と略記する。個人は，若年期に，w_0 に加えて前世代 $t-1$ から遺贈 b_{t-1} を受け取り，貯蓄（貸出）$s_0(t)$ を行ない，残りを消費 $c_0(t)$ に充て，老年期には，w_1 に加えて貯蓄（貸出）利息を受けとり，次世代 $t+1$ に遺贈 b_t を残し，最後の残りを消費 $c_1(t+1)$ に充てるものとする。このとき，個人の若年期，老年期のそれぞれの予算制約式

$$c_0(t)=w_0+b_{t-1}-s_0(t) \tag{35}$$

$$c_1(t+1)=w_1+(1+r(t))s_0(t)-b_t \tag{36}$$

がしたがう。さらに，消費，遺贈に関して非負制約

$$c_0(t), c_1(t+1), b_t \geq 0 \tag{37}$$

を設けよう。

ここで，代表的個人の効用函数は，自らの若年期，老年期の消費に加えて，次世代が享受する割引最大効用 U^*_{t+1}にも依存する利他的なそれとなるものとすれば，一般的に

$$U_t=U(c_0(t), c_1(t+1), U^*_{t+1}) \tag{38}$$

で表わされる。しかるに，以下では，遷移性を想定し，分離可能な型に特定化しよう。このとき，遷移式を成す評価函数

$$V_t(b_{t-1})=\max_{c_0(t),\, b_t}\ [u(c_0(t))+\beta u(c_1(t+1))]+\theta V_{t+1}(b_t) \tag{39}$$

が定義される。ただし，β は，異時点間割引因子であり，θ は，異世代間割引因子であり，さらに，θ は遺贈が実行されるとき正の利子率を保証するものである。ここで，Abel〔1〕にしたがって，$0<\beta, \theta<1$ と仮定する。

以上から，個人の問題は，上の制約条件((35)-(37)式)の下で，(40)式の評価函数を解くことに帰着する。そのためには，$c_1(t+1)$，$s_0(t)$ を消去すべく制約条件((35),(36)式)を遷移式に代入し，$c_0(t), b_t$ について最大化を実行すればよい。直ちに，

$$u'(c_0(t))-\beta u'(c_1(t+1))(1+r(t))=0 \tag{41}$$

$$-\beta u'(c_1(t+1))+\theta V'_{t+1}(b_t)=0 \tag{42}$$

がしたがう。

ここで，評価函数に包絡面定理（envelope theorem）を適用しよう。

いま，世代 t について，前世代からの遺贈 b_{t-1}に関して包絡面定理は

$$\begin{aligned}
V'_t(b_{-1}) &= u'(c_0(t))\frac{\partial c_0(t)}{\partial b_{t-1}}+\beta u'(c_t(t+1))\left[-(1+r(t))\frac{\partial c_0(t)}{\partial b_{t-1}}+(1+r(t))-\frac{\partial b_t}{\partial b_{t-1}}\right] \\
&\quad +\theta V'_{t+1}\frac{\partial b_t}{\partial b_{t-1}} \\
&= \frac{\partial c_0(t)}{\partial b_{t-1}}\left[u'(c_0(t))-\beta u'(c_t(t+1))(1+r(t))\right] \\
&\quad +\frac{\partial b_t}{\partial b_{t-1}}\left[-\beta u'(c_1(t+1))+\theta V'_{t+1}\right]+\beta u'(c_1(t+1))(1+r(t))
\end{aligned} \tag{43}$$

を導く。しかるに，(43)式の右辺第 1 項の〔 〕内は(41)式に他ならず，第 2 項のそれは(42)式に他ならず，ともにゼロを導く。さらに，再び(41)式を考慮すれば，包絡面条件

$$V'_t(b_{t-1})=\beta u'(c_1(t+1))(1+r(t))=u'(c_0(t)) \tag{44}$$

がしたがう。同様の議論は世代$t+1$についても妥当する。したがって，上の包絡面条件((44)式)を用いれば，(42)式は，

$$-\beta u'(c_1(t+1))+\theta u'(c_0(t+1))=0 \tag{45}$$

を意味する。ただし，$c_0(t+1)$は，世代$t+1$の個人の若年期の消費であるが，定常状態において，$c_0(t+1)=c_0(t)$となる。

さらに，非負条件((37))が等号で成立すれば

$$u'(c_1(t+1))>\theta u'(c_0(t+1)) \quad \text{if} \quad b_t=0 \tag{46}$$

がしたがう。

さて，上の１階条件((41)式)は，世代tの若年期と老年期の間の限界代替率が貯蓄(貸出)の粗収益率と均等しなければならないことを示唆しており，$b_t>0$，すなわち，世代間遺贈の内点解に対し，$t+1$期における世代tの老年期の消費と世代$t+1$の若年期の消費との間の限界代替率が世代間割引因子と均等しなければならないことを示唆している。

以下で，利他的個人の消費の時間経路の動学をみるために，次世代への遺贈b_tを所与することにする。このとき，所与の遺贈水準b_t^*と制約条件の下で効用を最大化する世代tの代表的個人の最適消費ベクトル$(c_0^*(t), c_1^*(t+1))$に対し，

$$\begin{aligned}&U_t(c_0^*(t), c_1^*(t+1); w_0, w_1, r(t), b_{t-1}, b_t^*)\\&\quad=U_t^*(b_t^*, w_0, w_1, r(t), b_{t-1})\end{aligned} \tag{47}$$

を満たす効用函数U_t^*を定義しよう。U_t^*は，所与の変量に対して最大効用を与える間接効用函数(indirect utility function) とみなすことができる。

上の(41)式を変形すれば，均衡において，

$$\beta(1+r(t))=\frac{u'(c_0(t))}{u'(c_1(t+1))} \tag{48}$$

がしたがう。ここで，上の予算制約式((35), (36)式)を生涯予算制約式

$$c_1(t+1)=w_1+(1+r(t))[w_0-c_0(t)+b_{t-1}]-b_t^* \tag{49}$$

と変形し，さらに，(48)式を(49)式に代入すれば，

$$\frac{u'(c_0(t))}{u'(c_1(t+1))}=\frac{\beta[w_1-c_1(t+1)-b_t^*]}{c_0(t)-w_0-b_{t-1}} \tag{50}$$

がしたがう。

以下の問題は，(50)式を$c_0(t)$(もしくは，$c_1(t+1)$)の差分方程式に帰着させることになる。まず，所与の$b_t^*>0$に対し，$c_0^*(t)>0, c_1^*(t+1)>0$ ($t=1, 2, \cdots$) を満たす消費の内点解が存在するものと仮定し，さらに，効用函数uは厳密な凹函数で２回微分可能な増加函数であり，分離可能であるものと仮定する。このとき，(50)式は，

$$c_1(t+1)=G(c_0(t);w_0,w_1,b_{t-1};b_t^*) \tag{51}$$

の形に解くことができる。[9)]

ところで，初期賦存の集計量の成長率はゼロであるものとすると，例えば，期間 t において，経済全体における市場均衡は，世代 t の若年者の供給(需要)と世代 $t-1$ の老年者の需要(供給)とが過不足なく相殺される収支均等化条件，すなわち，実現可能性条件

$$[w_0+b_{t-1}-c_0(t)]+[w_1-c_1(t)-b_{t-1}]=0 \tag{52}$$

がしたがわなければならない。ただし，$c_1(t)$ は世代 $t-1$ の老年者の消費である。いま，(50)式を１期先送りすれば

$$[w_0+b_t-c_0(t+1)]+[w_1-c_1(t+1)-b_t]=0 \tag{53}$$

$$\text{or} \quad c_1(t+1)=w_0+b_t-c_0(t+1)-w_1-b_t \tag{54}$$

がしたがう。ここで，(54)式を生涯予算制約式((49)式)に代入すれば

$$w_1+(1+r(t))[w_0+b_{t-1}-c_0(t)]-b_t=w_0+b_{t-1}-c_0(t+1)+w_1-b_t \tag{55}$$

$$\text{or} \quad c_0(t+1)=w_0+b_{t-1}+(1+r(t))[c_0(t)-w_0-b_{t-1}] \tag{56}$$

がしたがう。

ここで，

$$\frac{1}{\beta}W(c_0(t);w_0,w_1,b_{t-1};b_t^*)=\frac{u'(c_0(t))}{u'(c_1(t+1))} \tag{57}$$

を満たす制約付き限界代替率函数（constrained marginal rate of substitution function）を定義する。このとき，$W(\cdot)$ は，個人的に最適かつ実現可能なプログラムに対し，将来消費に対する現在消費の限界代替率を表わす。しかるに，(48)式を想起し(56), (57)式を結合すれば，差分方程式

$$c_0(t+1)=w_0+b_{t-1}+\frac{1}{\beta^2}[w(c_0(t);w_0,w_1,b_{t-1};b_t^*](c_0(t)-w_0-b_{t-1})\equiv f(c_0(t)) \tag{58}$$

を得る。

項を改めて，上の差分方程式((58)式)の動学をみてみよう。

2. 遺贈下における消費経路

本項では，次世代への所与の遺贈水準の下で，代表的個人の消費の時間経路の動学をみる。

さて，個人の効用函数の形状を限定するための仮定を設けよう。[10)]

まず，制約付き限界代替率函数 $W(\cdot)$ に対し，ある消費水準 $\hat{c}_1$ において，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_1)>1$ がしたがうものとする。このとき，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_1)$ は評価点 α_1 を定義する。

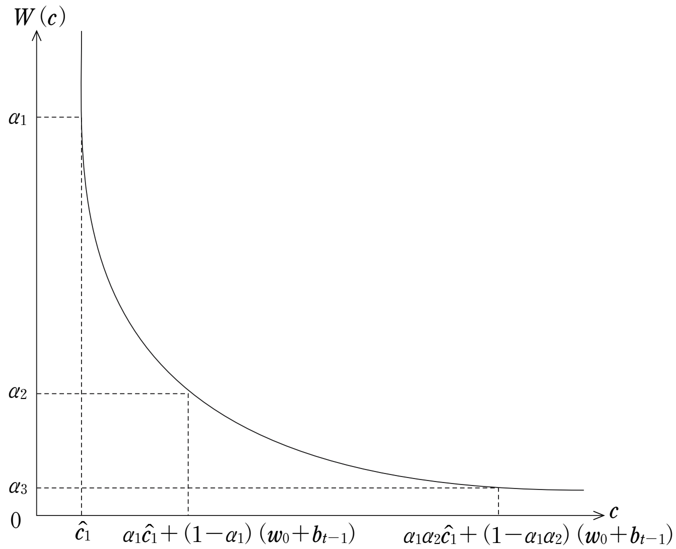

図-8

次に，消費水準 $\hat{c}_1$と w_0+b_{t-1}との $\alpha_1, 1-\alpha_1$による内分点 $\hat{c}_2$において，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_2)>1$がしたがうものとする。このとき，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_2)$は，もう1つの評価点 α_2を定義する。

最後に，消費 $\hat{c}_1$と w_0+b_{t-1}との $\alpha_1\alpha_2, 1-\alpha_1\alpha_2$による内分点 $\hat{c}_3$において，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_3)\leq 1$がしたがうものとする。このとき，$\frac{1}{\beta_2}W(\hat{c}_3)$は，さらに，評価点 α_3を定義する。

以上を整理すれば

（i） $\alpha_1=\frac{1}{\beta^2}W(\hat{c}_1)>1$ (59)

（ii） $\alpha_2=\frac{1}{\beta^2}W(\hat{c}_2=\alpha_1\hat{c}_1+(1-\alpha_1)(w_0+b_{t-1}))>1$ (60)

（iii） $0<\alpha_3=\frac{1}{\beta^2}\alpha_1\alpha_2W(\hat{c}_3=\alpha_1\alpha_2\hat{c}_1+(1-\alpha_1\alpha_2)(w_0+b_{t-1}))\leq 1$ (61)

を満たすような $\hat{c}_1>w_0$が存在するものと仮定される。かかる $\hat{c}_1>w_0$なる $\hat{c}_1$が存在するとき，個人の効用函数は十分代替性条件（sufficient substitution condition）を満たすと言われる。(**図-8**参照。)

上の仮定は，**図-8**にみるように，無差別曲線が原点に対し深く湾曲し，十分な代替性が保証されることを要請している。

さて，ここで，［Li＝Yorke カオス定理］をみておこう。

［Li＝Yorke カオス定理］は，前節でみた［Sarkovskii 定理］の系として位置づけられる定理である。

すでに示唆したごとく，累次写像(iterated map)$f^k(x)$は，$f^0(x)=x$ とするとき，$f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$と定義される。さらに，$f^k(x)=x$，かつ $f^j(x)\neq x\,(0<j<k)$ならば，点 x は，f の下で k–周期的（k–

periodic）と呼ばれる。
このとき，［Li＝Yorke カオス定理］は，次のごとく主張する。

［カオス定理］

R の閉区間 $I=[a,b]\in R$ に対し，自身の中への連続写像 $f: I\to I$ の下で差分方程式

$$x_{t+1}=f(x_t) \tag{62}$$

を考える。さらに，

$$f^3(x)\leq x<f(x)<f^2(x) \tag{63}$$

を満たすような点 $x\in I$ が存在するものとする。
このとき，
（i） すべての $k=1,2,3,$ ……に対し，すべての t の下で $x_t\in I$ を満たすような k-周期解が存在する。
（ii） すべての $x_0\in S$ に対し，(62)式の解が S に留まり，さらに，
(a) すべての $x,y\in S, x\neq y$ に対し

$$\lim_{t\to\infty}\sup|f^t(x)-f^t(y)|>0$$

$$\lim_{t\to\infty}\inf|f^t(x)-f^t(y)|=0$$

(b) すべての周期点 x とすべての点 $y\in S$ に対し

$$\lim_{t\to\infty}\sup|f^t(x)-f^t(y)|>0$$

を満たすような不可算集合 $S\in I$ が存在する。

上の定理の(ii)-(a)は，相異なる 2 点から出発する集合 S 内の経路が限りなく接近するが，再び乖離していくことを意味している。
ところで，前項で導かれた消費経路に関する差分方程式((58)式)で定義された $f(c_0(t);w_0,b_{t-1};b_t^*)$ は連続函数となる。いま，実現可能性条件 $w_0-c_0(t)+w_1-c_1(t)=0$ を 1 期先送りすれば

$$[w_0-c_0(t+1)]+[w_1-c_1(t+1)]=0 \tag{64}$$

がしたがうことを想起すれば，前項の(50), (57)式から

$$\begin{aligned}\beta[c_0(t+1)-w_0-b_{t-1}]&=\frac{u'(c_0(t))}{u'(c_1(t+1))}(c_0(t)-w_0-b_{t-1})\\&=\beta[w_1-c_1(1+t)-b_t^*]<w_1\end{aligned} \tag{65}$$

がしたがう。ただし，最右辺の不等号は，$c_1(1+t)>0, b_t^*>0, 0<\beta<1$ の仮定からしたがう。
まず，十分代替条件の(i)，すなわち

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta^2} W(c_0(t)) > 1 \tag{66}$$

の場合を考える。両辺に，$c_0(t) - w_0 - b_{t-1}$を乗ずると

$$(c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) \frac{1}{\beta^2} W(c_0(t)) > c_0(t) - w_0 - b_{t-1} \tag{67}$$

がしたがい，さらに，両辺に $w_0 + b_{t-1}$を加えると，

$$c_0(t) < (c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) \frac{1}{\beta^2} W(c_0(t)) + w_0 + b_{t-1} = f(c_0(t)) \tag{68}$$

がしたがい，$c_0(t) < f(c_0(t))$ が確かめられた。

次に，十分代替条件の(ii)，すなわち

$$\alpha_2 = \frac{1}{\beta^2} W(\alpha_1 c_0(t) + (1-\alpha_1)(w_0 + b_{t-1})) > 1 \tag{69}$$

の場合を考える。(69)式の両辺に $\alpha_1(c_0(t) - w_0 - b_{t-1})$を乗じ，$w_0 + b_{t-1}$を加えると，

$$\begin{aligned} f(c_0(t)) &= \frac{1}{\beta^2} W(c_0(t)) \alpha_1 (c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) + w_0 = \alpha_1 c_0(t) + (1-\alpha_1)(w_0 + b_{t-1}) \\ &< \alpha_1 (c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) \frac{1}{\beta^2} W(\alpha_1 c_0(t) + (1-\alpha_1)(w_0 + b_{t-1})) + w_0 + b_{t-1} \\ &= f(f(c_0(t)) = f^2(c_0(t)) \end{aligned} \tag{70}$$

がしたがい，$f(c_0(t) < f^2(c_0(t))$ が確かめられた。

最後に，$f^3(c_0(t)) < c_0(t)$を確かめよう。

$$0 < \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{\beta^2} W(\alpha_1 \alpha_2 c_0(t) + (1-\alpha_1 \alpha_2)(w_0 + b_{t-1})) \leq 1 \tag{71}$$

の両辺に，$c_0(t) - w_0 - b_{t-1}$を乗じ，$w_0 + b_{t-1}$を加えると

$$\begin{aligned} c_0(t) &\geq \frac{1}{\beta^2} (c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) \alpha_1 \alpha_2 W(\alpha_1 \alpha_2 c_0(t) + (c - \alpha_1 \alpha_2)(w_0 + b_{t-1})) + w_0 + b_{t-1} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \beta W(B) + w_0 + b_{t-1} = f(f^2(c_0(t)) = f^3(c_0(t)) \end{aligned} \tag{72}$$

がしたがい，$c_0(t) \geq f^3(c_0(t))$が確かめられた。ただし，

$$B = \left[\left(\frac{1}{\beta^2} \right)^2 (c_0(t) - w_0 - b_{t-1}) W(c_0(t)) \right] W \left(w_0 + b_{t-1} + \frac{1}{\beta^2} (c_0(t) - w_0 - b_{t-1} \right) W(c_0(t))$$

である。

以上から，

$$f^3(c_0(t)) \leq c_0(t) < f(c_0(t)) < f^2(c_0(t)) \tag{73}$$

が確かめられ，［カオス定理］の要件が満たされ，上の差分方程式((58)式)は，区間 $I=(w_0+b_{t-1}+w_1)$ において，カオスを発生されることが帰結される。

8）かかる想定は，永久寿命をもつ１人の主体を想定することと同値となる。
9）かかる帰結は，Benhabib＝Day, *op. cit.,* の Lemma 1 に相当する。
10）以下の議論の手続きは，Benhabib＝Day, *op. cit.,* に負う。

結びにかえて

19世紀の後半，それまでの連続性を主体とする Newton＝Laplace 型の上部構造は，２方面からの攻撃に曝されることになる。１つは，奇怪な函数ないし集合の発明，発見をともなう純粋数学からの攻撃であった。当初，単なる数奇の対象とみなされていた函数，集合の多くは，カオス理論，フラクタル幾何学（fractal geometry）の基礎になっていく。

もう１つは，天体力学（celestial mechanics）の未解決問題からの攻撃であった。やがて，それらは，分岐理論（bifurcation theory）へと発展していく。近年の経済動学の理論的支柱をなすカオス理論と分岐理論が別々の境遇から生まれたことは興味深い。

上では，カオス理論の中心定理を成す Li＝Yorke 定理，そして，その母体となる Sarkovskii 定理が資産価格，個人の消費経路に対し妥当する可能性をみた。

まず，２期間生存するライフ･サイクルをもつ個人が，それぞれの期間に消費の至福点をもち，そこからの乖離幅の２乗分だけ効用が減少していく減点経済において，資産価格が Sarkovskii 定理にしたがう周期解をもつことが確認された。

次に，２期間生存する個人から成る世代重複経済において，各世代の老年者が次世代に利他的動機による遺贈を残していくとき，前世代からの遺贈を受け取る一方で，次世代への遺贈が所与とされるところで，個人の消費経路が Li＝Yorke 定理にしたがう周期解をもつことが確認された。

逆に，現世代の若年者が前世代の老年者に対し贈与（gift）を行なうとき，個人の消費経路のあり方を検討することは，本稿の興味深い発展化の一方向であろう。

References

〔1〕 A. B. Abel, “Operative Gift and Bequest Motives,” *American Economic Review*, 77, 1987.

〔2〕 J. Benhabib and R. H. Day, “A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 1982.

〔3〕 J. B. Burbidge, “Government Debt in an Overlapping-Generations Model with Bequests and Gifts,” *American Economic Review*, 73, 1983.

〔4〕 D. Cass and M. Yaari, “A Re-Examinations of the Pure Consumption Loans Model,” *Journal of Political Economy*, 74, 1966.

〔5〕 R. H. Day, *Complex Economic Dynamics : An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*, *Vol-*

ume I, MIT Press, 1994.
〔6〕 R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin / Cummings Publishing Co., 1986.
〔7〕 P. A. Diamond, “National Debt in a Neoclassical Growth Model,” *American Economic Review*, 55, 1965.
〔8〕 A. Drazen, “Government Debt, Human Capital, and Bequests in a Life–Cycle Model,” *Journal of Political Economy*, 86, 1978.
〔9〕 D. Gale, “Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Model,” *Journal of Economic Theory*, 6, 1973.
〔10〕 J. Laitner, “Bequests, Gifts, and Social Security,” *Review of Economic Studies*, 55, 1988.
〔11〕 T. Y. Li and J. A. Yorke, “Period Three Implies Chaos,” *American Mathematical Monthly*, 82, 1975.
〔12〕 R. M. May “Biological Populations with Non–Overlapping Generations : Stable Points, Stable Cycles, and Chaos,” *Science*, 198, 1974.
〔13〕 G. T. McCandless, Jr. and N. Wallace, *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, 1991.
〔14〕 W. H. Meckling, “An Exact Consumption–Loan Model of Interest : A Comment,” *Journal of Political Economy*, 68, 1976.
〔15〕 M. Nerlove, A. Razin and E. Sadka, “A Bequest–Constrained Economy : Welfare Analysis,” *Journal of Public Economics*, 37, 1988.
〔16〕 S. A. O’Connell and S. P. Zeldes, “Dynamic Efficiency in the Gifts Economy,” *Journal of Monetary Economics*, 31, 1993.
〔17〕 J. B. Rosser, Jr., *From Catastrophe to Chaos : A General Theory of Economic Discontinuities*, Klumer Academic Publishers, 2000.
〔18〕 P. A. Samuelson, “An Exact Consumption Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance,” *Journal of Political Economy*, 66, 1958.
〔19〕 A. N. Sarkovskii, “Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself,” *Украинский Математи - ческий Журнал* , 16, 1964.
〔20〕 K. Shell, “Notes on the Economics of Infinity,” *Journal of Political Economy*, 79, 1971.
〔21〕 R. Shone, *Economic Dynamics*, Cambridge University Press, 2002.
〔22〕 D. Starret, “On Golden Rules, ‘the Biological Theory of Interest’ and Competitive Inefficiency,” *Journal of Political Economy*, 80, 1972.
〔23〕 E. A. Thompson, “Debt Instruments in Macroeconomic and Capital Theory,” *American Economic Review*, 57, 1967.
〔24〕 T. Vialar, *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*, Springer, 2009.