

## 利他的世代重複生産経済と Hopf 分岐\*

中島 巖\*\*

### <要約>

土星 (Saturn) の第 7 衛星であるピペリオン (Hyperion) の予測不能な回転運動が天体力学におけるカオス運動の観測例であった。その後、最初に研究対象となったカオス運動発生可能なモデルの範疇は振動理論 (theory of oscillations) からのものであった。その最初の一般的議論はロシア学派によって展開された。そこでは、理論に留まらず実験の過程をも含んだカオス運動発生モデルの実例が Van der Pol と Van der Mark によって提示されるに至った。1927年のことであった。

現在マクロ経済学において重用されている Hopf 分岐の議論は、上の Van der Pol の振動モデルから発想を得たものであった。Hopf 分岐は、非振動的運動からリミット・サイクル (limit cycle) 運動が発生する可能性を説くものである。

以下では、Van der Pol 方程式の例に拠りながら Hopf 分岐が発生する過程を確認した後に、生産用役としての資本が利他的選好をもつ親世代から子世代へと遺贈されていく世代重複生産経済において、かかる Hopf 分岐が発生するための条件を導く。

若年者が賦存労働を自由に弾力的に供給し、生産を組織し、利他的選好をもつ老年者が自らの消費決定と次世代への遺贈水準の決定とを行っていく世代重複経済において、生産過程における労働・資本間の代替弾力性をパラメータとすると、上の代替弾力性が経済の全所得のうち資本所得が占める資本分配率を下回るとき、Hopf 分岐が発生し得ることが帰結される。

JEL 区分：E23, E29, E32

キーワード：Hopf 分岐, 世代重複生産経済, 遺贈

---

\*筆者は、立教大学図書館の好誼に与かっている。記して感謝いたしたい。

\*\*専修大学名誉教授

## 序

Gale [11] は、内生的景気循環が世代重複経済において発生し得る可能性を示した。次いで、Grandmont [12] は、同種モデルの特殊型による動学分析に分岐理論 (bifurcation theory) を適用し、連続的 flip 分岐の発生、さらに、パラメータの変化を通じた複雑な循環の連続的発生の可能性を確かめた。しかるに、そこでの結論は、黄金律定常解 (Golden Rule stationary state) において、貯蓄の利子率に関する弾力性が  $-\frac{1}{2}$  以下でない限り分岐の発生を認めないという現実妥当性を満たし得ないものであった。

これに対し、Reichlin [19] は、貯蓄の利子率に関する弾力性が正の値をもち、労働供給が内生化されるところで、定常解の近傍に閉曲線 (closed curves) が存在する可能性を Hopf 分岐を用いて明らかにした。それに先立つ世代重複生産経済に対する Hopf 分岐の適用例は、Diamond [8] の原モデルをベースとした Farmer [10] のそれを見るのみであった。

ところで、利他主義 (altruism) が支配する生産経済において、世代間移転 (intergenerational transfer) の効率性 (Kolberg [13] 参照。), 資本蓄積の Nash 解の効率性 (Lane = Mitra [15] 参照。), 完全均衡の存在性 (Leininger [16] 参照。), 経済成長に際しての均衡の存在性、そこでの効率性 (Bernheim = Ray [3] 参照。) 等が論じられてきた。これに対して、世代重複経済に対する利他主義の適用は、限定的である。(例えば、Drazen [9], O'Connell = Zeldes [18], Abel [1], Burbidge [4] 等参照。)

本稿における我々の目的は、世代重複生産経済において、利他主義を通じて資本用役が後続世代に遺贈されていくときの経済の安定性を確かめることにある。

まず、次節で、動学体系の安定性と Hopf 分岐のあり方を概観した上で、第 2 節において、遺贈される資本に対し、労働供給が非弾力的に供給されるところでの鞍点経路 (saddle path) の存在性、次いで、労働供給が弾力的になされるところでの Hopf 分岐の発生可能性を確かめる。最後に、若干の結論的言及がなされる筈である。

なお、本稿は最終稿ではない。

## 第 1 節 動学体系の安定性と Hopf 分岐

### 1. 動学体系の安定性——予備的考察

本節では、動学体系の安定性と分岐のあり方を概観する。<sup>1)</sup>

本項では、2 次元動学体系の Jacobian 行列の特性根の性質と体系の安定性の関係をみておこう。いま、 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  への連続微分可能な写像  $f, g$  を

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t) \tag{1}$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t) \quad (2)$$

で表わせば、この定常解(ないし不動点) $s = (x^*, y^*)$ の安定性は、偏微係数の Jacobian 行列

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

の特性根に依存する。ここで、 $s$  は後にみるごとく、特性根のモジュラス (modulus) が 1 以下であるとき吸込み (sink), 1 より大きいとき湧出 (source) となり、一方の特性根が極座標の単位円内にあり、もう一方の特性根が単位円外にあるとき鞍点 (saddle) となる。

Jacobian 行列  $J$  の特性根は、次の特性方程式

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} f_x - \lambda & f_y \\ g_x & g_y - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (f_x - \lambda)(g_y - \lambda) - f_y g_x \\ &= \lambda^2 - (f_x + g_y)\lambda + f_x g_y - f_y g_x \\ &= \lambda^2 - (\text{tr}(J))\lambda + \det(J) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

を解く根である。

ここで、 $D \equiv \det J$ ,  $T = \text{tr} J$  と設定し、それぞれをたて軸、横軸にとれば、カルテシアン平面 (Cartesian plane) を得る。いま、上の特性方程式の判別式  $\Delta$  をゼロと置く、すなわち

$$\Delta = T^2 - 4D = 0 \quad (5)$$

を定義すれば、**図-1-(a)**において、 $T$ - $D$  空間に原点を底とする放物線を描き、 $\Delta \geq 0$  ならば、特性根は実根となり、放物線の下部、 $\Delta < 0$  ならば、特性根は複素根となり、その上部を占める。

いま、特性根  $p(\lambda)$  を  $\lambda = 1, -1$  で評価すれば

$$p(1) = 0 \iff D = T - 1 \quad (6)$$

$$p(-1) = 0 \iff D = -(T + 1) \quad (7)$$

がしたがう、それぞれ  $T$ - $D$  空間に接片 = -1, 傾き = 1 の直線, 接片 = -1, 傾き = -1 の直線を描く。このとき  $p(1) > (<) 0$  は、 $p(1) = 0$  直線の上部(下部)を占め、 $p(-1) > (<) 0$  は、 $p(-1) = 0$  直線の上部(下部)を占める。**(図-1-(b), (c)参照)**

ここで、**図-1-(a), (b), (c)**を重ねれば、**図-2**がしたがう。 $T$ - $D$  空間が、8つの領域に区分される。

領域 1 :  $p(1) < 0$  かつ  $p(-1) > 0$  で鞍点 (saddle)。

領域 2 :  $p(1) < 0$  かつ  $p(-1) < 0$  で湧出し (source)。

領域 3 :  $p(1) > 0$  かつ  $p(-1) < 0$  で鞍点。

領域 4 :  $p(1) > 0$  かつ  $p(-1) > 0$ ,  $D > 2$ ,  $T < -2$  で湧出し。

領域 7 :  $p(1) > 0$  かつ  $p(-1) > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = T \in (-2, 2)$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = D \in (-1, 1)$  で吸込み (sink)。

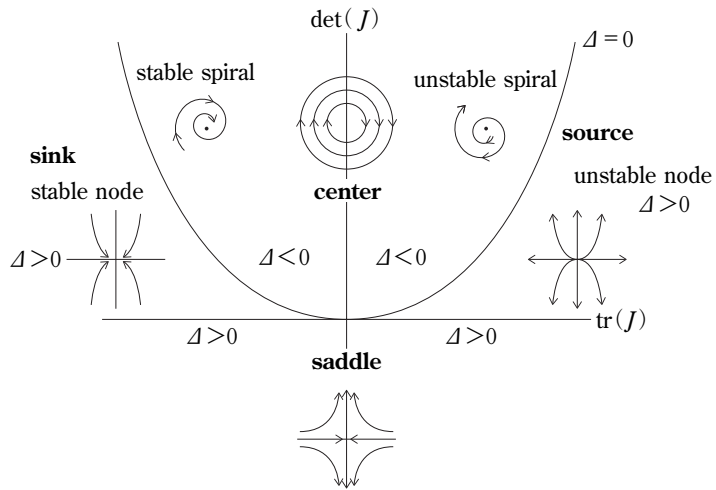


図-1-(a)

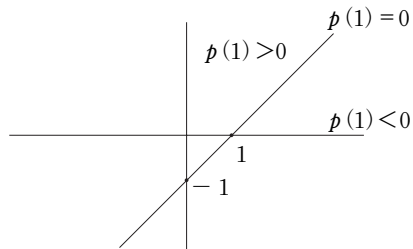


図-1-(b)

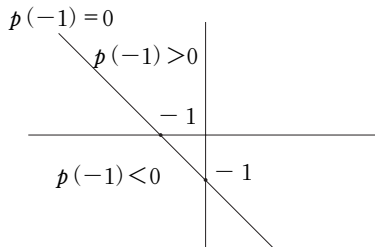


図-1-(c)

ところで、領域5,6では、特性根は複素根の対、例えば

$$\lambda_1 = a + ib \quad \lambda_2 = a - ib \tag{8}$$

で表わされる。このとき、 $D = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ 、 $T = \lambda_1 + \lambda_2$ である。

ここで、モジュラス (modulus)  $|\lambda|$  は、

$$|\lambda| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \tag{9}$$

で定義される。このとき、安定性は、特性根が極座標で単位円の内部か外部か、そのいずれに位置するかによって依存する。領域5では、 $D > 1 \Rightarrow |\lambda| > 1$ がしたがって湧出しとなるのに対し、領域6では、 $D < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$ がしたがって吸込みとなる。

ところで、モジュラス  $|\lambda|$  のタームで動学体系の定常解が Hopf 分岐を発生させる可能性を示すことができる。

いま、変数が複数あり、特性根が複素数となる場合を想定し、 $x \in \mathbf{R}^2$  とし、 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  なる無限連続微分可能な函数  $f$  に対し、 $\mu$  をパラメータとするとき、

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu) \quad (10)$$

の定常解が  $\mu$  の値の如何に関らずゼロとなる、すなわち、

$$f(0, \mu) = 0 \quad (11)$$

がしたがうとき、 $\mu < 0$  ならば定常解は安定、 $\mu > 0$  ならば不安定なものとなるものとする。

このとき、 $f$  の Jacobian 行列の特性根が複素根  $\lambda(\mu) = a \pm ib$  をとるとき、 $\mu < 0$  ならば  $|\lambda(\mu)| < 1$  がしたがって、 $\mu > 0$  ならば  $\mu = 0$  を分岐点として、 $|\lambda(\mu)| > 1$  となり、体系は安定から不安定に変わる。このことは、

$$|\lambda(0)| = 1, \quad \left. \frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0 \quad (12)$$

がしたがうことを要請する。ただし、特性根が  $\mu = 0$  において  $\lambda(0) = \pm i$  なる純虚数となる場合も含まれる。かかる状況は、 $\mu = 0$  を分岐値とする Hopf 分岐 (Hopf bifurcation) が発生しているそれとなる。

## 2. Hopf 分岐

本項では、動学体系がパラメータを含むとき、パラメータの変化が体系の定常解に Hopf 分岐を発生させる可能性をみる。<sup>2)</sup>

分岐の性質は、変数の数ではなく、パラメータの数に依存する。変数が1個の場合の差分方程式の定常解の特性根は実数となるが、変数が複数個ある場合には、特性根が複素数となる可能性が出てくる。以下では、変数2個、パラメータ1個から成る動学体系に議論を限定することにする。

さて、Hopf 分岐は、動学体系の定常解の安定性が損われる場合の1つの形態であり、体系の定常解の Jacobian 行列の特性根がモジュラス  $|\lambda| = 1$  をもつ共役複素数であるとき、すなわち、 $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$  が  $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2 + b^2 = |\lambda|^2 = 1$ 、したがって  $|a| < 1$  であり、さらに、 $\text{tr} = \lambda_1 + \lambda_2 = 2a \in (-2, 2)$  の性質をもつ根であるときに発生する現象である。かかる分岐は、前項の図-2の安定性三角形の水平部分 AB において発生する。

ここで、Hopf 分岐が発生し得る一例として、Van der Pol 方程式の場合をみてみよう。<sup>3)</sup>

Van der Pol 方程式は、

$$\ddot{x} = \mu(1-x^2)\dot{x} - x \quad (13)$$

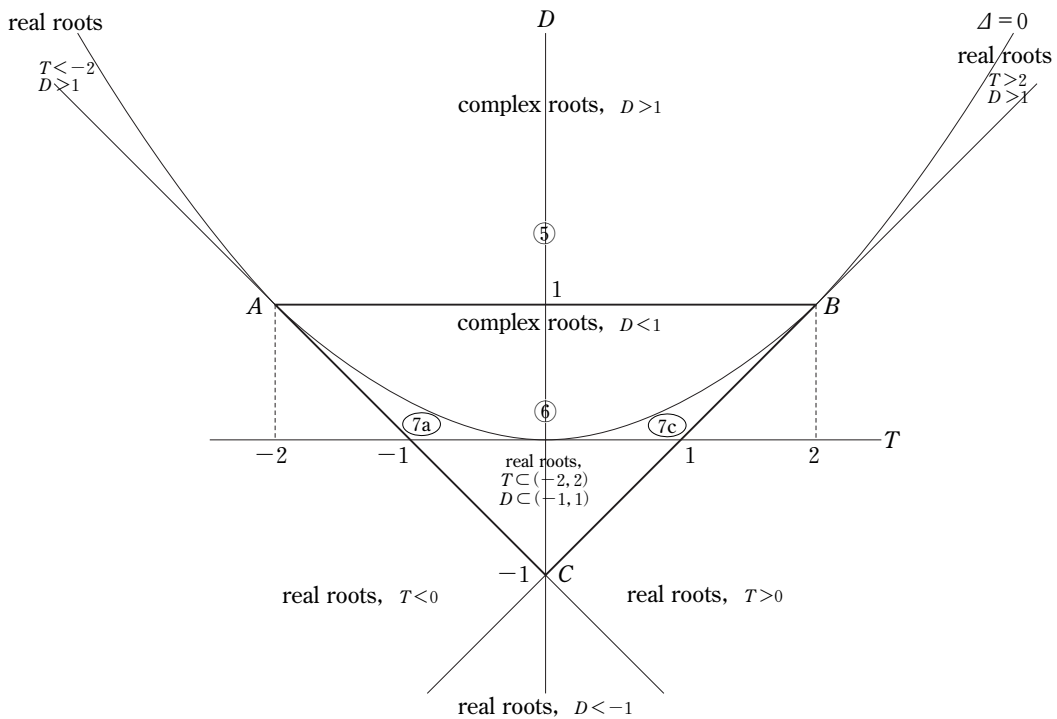


図-2

の形をとる1変数の2階微分方程式である。ただし、 $\mu$  はパラメータである。しかるに、2階微分方程式は、適当な変形を施せば、1階微分方程式体系の形に変換し得る。

いま、 $\dot{x}=y$  と設定すれば  $\dot{y}=\ddot{x}$  となり、(13)式は、1階微分方程式体系

$$\dot{x}=y \tag{14}$$

$$\dot{y}=\mu(1-x^2)y-x \tag{15}$$

で表現される。体系の定常解は、 $\dot{x}=0, \dot{y}=0$  とするとき特異点として導かれる。

ここで、体系に線型近似を施せば

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+2\mu xy) & \mu(1-x^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{16}$$

がしたがう。体系を定常解  $P=(0,0)$  で評価すれば Jacobian 行列

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \tag{17}$$

を得る。直ちに、 $\text{tr } J = \mu, \det J = 1$  がしたがう。

さて、Jacobian 行列  $J$  の特性根は、特性方程式

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)(\mu - \lambda) + 1 \\ &= \lambda^2 - \mu\lambda + 1 \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} J)\lambda + \det J = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を解くことによって求められる。ここで、特性方程式の判別式  $\Delta$  は、 $\operatorname{tr} J = \lambda_1 + \lambda_2$ 、 $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2$  を想起すれば

$$\Delta = (\operatorname{tr} J)^2 - 4(\det J) = \lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (19)$$

で表わされる。

上の特性方程式を解けば、特性根

$$\lambda_1 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad (20)$$

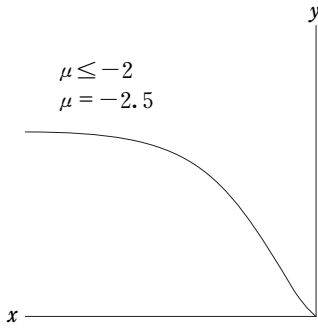
を得る。このとき、パラメータ  $\mu$  の値に応じて、特性根  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $x$ - $y$  平面に 5 つの場合を区分する。すなわち、

- (i)  $\mu < -2a$  のとき、特性根は負の実根となり、安定結節 (stable node) の場合を構成する。 $\mu = -2.5$  と特定するとき、**図-3-(a)** がしたがう。
- (ii)  $-2 < \mu < 0$  のとき、特性根は負の実数部分をもつ複素根となり安定渦状点 (stable focus) の場合を構成する。 $\mu = -0.5$  と特定するとき、**図-3-(b)** がしたがう。
- (iii)  $\mu = 0$  のとき、特性根は純虚数となり、中心 (center) の場合を構成する。**図-3-(c)** がしたがう。
- (iv)  $0 < \mu < 2$  のとき、特性根は、正の実数部分をもつ複素根となる不安定渦状点 (unstable focus) の場合を構成する。 $\mu = 0.5$  と特定するとき**図-3-(d)** がしたがう。
- (v)  $\mu \geq 2$  のとき、特性根は正の実根となり、不安定結節 (unstable node) の場合を構成する。 $\mu = 2.5$  と特定するとき、**図-3-(e)** がしたがう。

次に、上の 5 つの場合を  $\mu$  軸に沿った  $\mu$  の変化の中で位置づけてみよう。

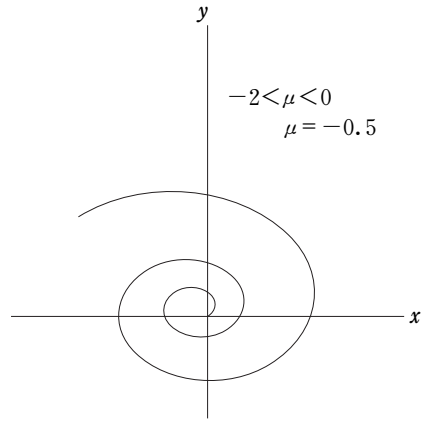
いま、 $x$  と  $y$  の均衡値を  $x^*, y^*$  で表わせば、 $\mu < 0$  のとき**図-3-(a)**、**(b)** から明らかのごとく、 $x^* = 0, y^* = 0$  がしたがう、体系は  $\mu$  軸に沿って移動していく。しかるに、 $\mu = 0$  に至ると、体系は劇的に変化し円 (circle) の形状をとる。さらに、 $\mu$  が正の方向に移動し続けると、体系は  $\mu$  の任意の正の特定値に対して  $x$ - $y$  平面にリミット・サイクル (limit cycle) の形状をとる。ただし、その形状は、もはや円ではなくなる。以上の過程は、**図-4** に示される。体系はパラメータ  $\mu = 0$  において分岐を生んでおり、かかる分岐は Hopf 分岐 (Hopf bifurcation) と呼ばれる。<sup>4)</sup>

一般に、Hopf 分岐は、動学体系の定常解の安定性に変化が生ずる際に発生する。しかるに、リ



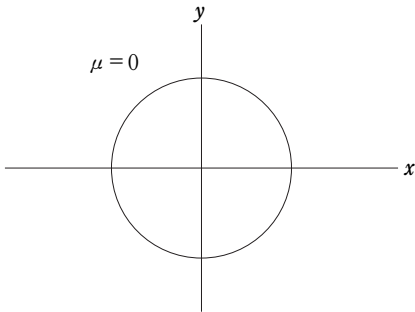
特性根：負の実根  
 $P$ ：安定結節

図-3-(a)



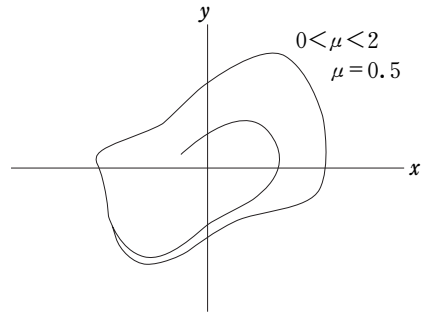
特性根：負実数部の複素根  
 $P$ ：安定渦状点

図-3-(b)



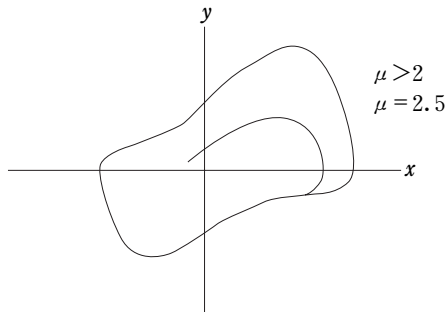
特性根：純虚根  
 $P$ ：中心

図-3-(c)



特性根：正実数部の複素根  
 $P$ ：不安定渦状点

図-3-(d)



特性根：正の実根  
 $P$ ：不安定結節

図-3-(e)



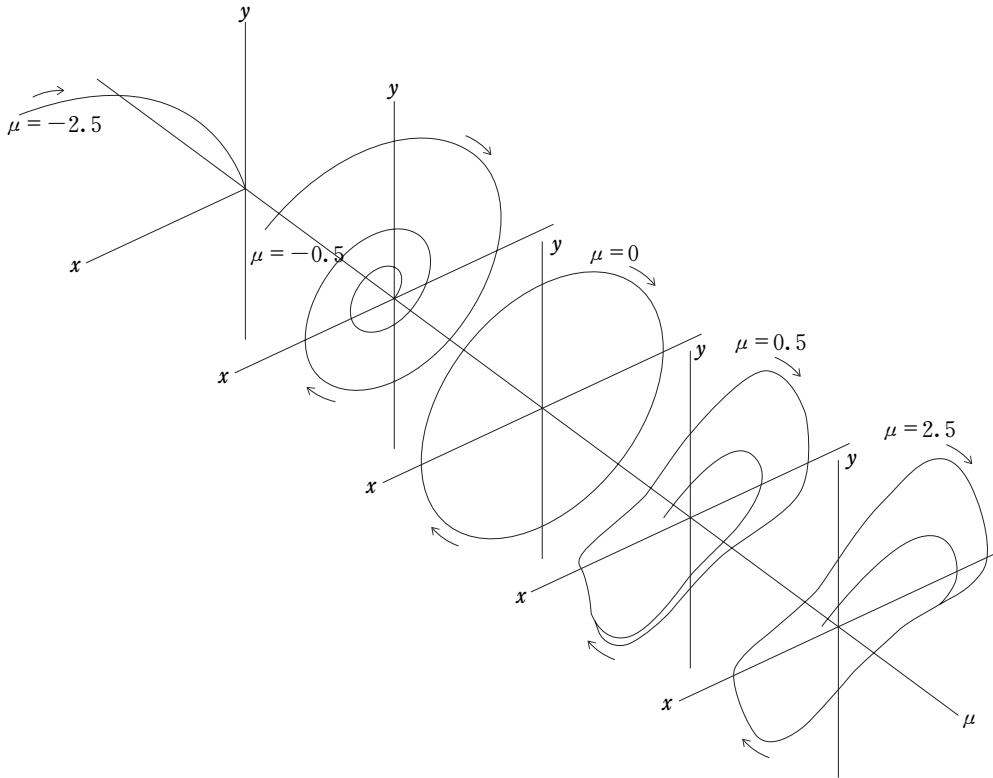


図-4

リット・サイクルは、体系が変数を 2 個，パラメータを少なくとも 1 個もつときに限って発生し得る。上の Van der Pol 方程式の場合には，この条件をすべて満たしており，パラメータ  $\mu$  が  $\mu=0$  を通過するとき，体系は， $\mu < 0$  に対する原点 ( $x^*=0, y^*=0$ ) たる安定均衡解から， $\mu \geq 0$  に対するリット・サイクルに変化する。したがって， $\mu=0$  は  $x$ - $y$  平面の原点において Hopf 分岐を発生させると帰結される。

ところで，Jacobian 行列の  $\det J$  が正のとき，特性根は複素根となることを想起すれば，以下でみるごとく，上の帰結は  $\det J > 0$  であり，複素根の実数部分，すなわち  $\text{tr } J = 0$  となるとき Hopf 分岐が発生すると言い換えることができる。かかる状況は，極座標において，特性根が虚数軸を傾きゼロ，すなわち，実数軸に平行に横切るそれである。

いま，パラメータ  $\mu$  に対し

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad \mu \in \mathbf{R} \tag{21}$$

を満たす動学体系の定常解  $x^*(\mu)$  が  $\mu$  の連続関数であり，特性方程式が  $\mu = \mu^*$  において一組の純虚根  $\lambda = \pm i$  をもち，その他に実数部分がゼロとなる根をもたないものとし，さらに

$$\left. \frac{d \text{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu = \mu^*} \neq 0 \tag{22}$$

がしたがうものとする。ただし、 $Re\lambda(\mu)$ は、 $\lambda(\mu)$ の実数部分である。このとき、Hopf分岐が発生することを上の議論は主張している。

ここで、特性方程式  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$  が 1 組の純虚根  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$  をもつものとする、特性方程式は

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad (23)$$

となる。このとき、(23)式は、 $a_1 = 0, a_2 = 1 > 0$  を意味する。逆に、 $a_1 = 0, a_2 = 1 > 0$  が成立するものとする、特性方程式

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (24)$$

は、純虚根  $\lambda_1 = \sqrt{a_2}i = i, \lambda_2 = -\sqrt{a_2}i = -i$  をもつことが確かめられる。

このことは、Hopf分岐の発生条件として、まず、 $\mu = \mu^*$ において、特性方程式が純虚根をもつことと、その係数  $a_1 = 0, a_2 = 1 > 0$  が同時にしたがうことが同値である。さらに、特性方程式が

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det J = 0 \quad (25)$$

と表現されることを想起すれば、 $\mu = \mu^*$ において Jacobian 行列の  $\text{tr}(J) = 0, \det J > 0$  が同時に満たされることが同値であることを意味している。

- 1) 本項の議論として、Azariadis [2], Medio [17], Vialar [23], Sandefur [20] 等参照。なお、図-2は、Azariadis, *op. cit.*, Fig. 6.6 (p. 66) に準ずる。
- 2) 本項の議論は、Shone [21], Vialar, *op. cit.*, に負う。図-3, 4は、Shone, *op. cit.*, Fig. 7.14, 15 (p. 305, 306) に準ずる。図-4において、Fig. 17-15の曲線形状を修正しておく。
- 3) Shone の提示する Jacobian 行列は、第 1 行の第 1 列目と第 2 列目が逆転しているごとくである。訂正しておく。
- 4) Hopf 分岐には 2 タイプがある。リミット・サイクルが安定点の周囲で発生するとき、上方臨界的 Hopf 分岐 (supercritical Hopf bifurcation)、不安定点の周囲で発生するとき、下方臨界的 Hopf 分岐 (subcritical Hopf bifurcation) と呼ばれる。上の例は、前者に相当する。

## 第 2 節 世代重複生産経済と遺贈

### 1. 非弾力的労働供給

本節では、生産過程を含む世代重複生産経済において、生産用役としての資本を次世代に遺贈する利他的選好が作用するところでの経済の定常解の安定性をみる。

本項では、少年期、成人期から成る各世代が次世代に資本を遺贈する利他的選好をもつとき、成人期にある世代が賦存労働を非弾力的 (inelastically) に生産過程に供給し、生産を組織する経済の定常解の安定性をみる。<sup>5)</sup>

まず、対比のために、Ramsey に起源をもつ最適成長論 (optimal growth theory) を概観してお

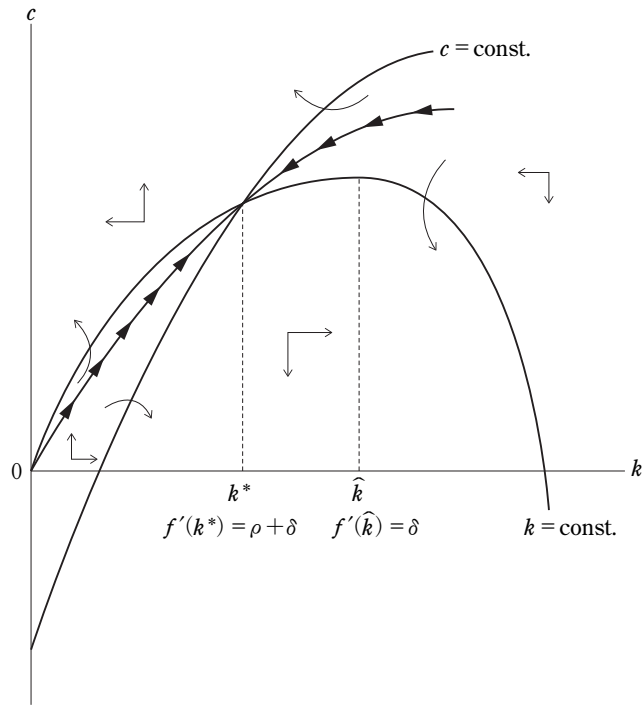


図-5

こう。<sup>6)</sup>

最適成長論が謳う最適性は、そこでの貯蓄計画が無限寿命をもつ代表的個人の消費流列からの割引生涯効用の最大化を図る中央計画当局の選択する計画に同値であることに由来する。

さて、中央計画当局は、個人の生涯効用函数

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (26)$$

を最大化すべく消費流列を決定する。ただし、 $u$  は瞬時的効用函数であり、 $\beta \in (0, 1)$  は、一定の割引因子である。

このとき、資本蓄積過程は、連続時間表示で

$$\dot{k} = (\delta + n)k = sf(k) \quad (27)$$

で表わされ、離散時間表示で

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + sf(k_t) \quad (28)$$

で表わされる。ただし、 $k$  は 1 人当たりの資本量、すなわち資本・労働比率であり、 $\delta, n, s$  は、それぞれ資本減耗率、人口成長率、そして貯蓄率であり、 $f$  は新古典派生産函数である。

上の(26)式の最大化を実行すれば、最適条件は離散時間表示で

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] \quad (29)$$

で表わされる。しかるに、人口成長率  $n=0$  とし、 $sf(k_t) = f(k_t) - c_t$  を考慮すれば、(28), (29) 式の体系は、

$$\beta [1 - \delta + f'(k_{t+1})] u'(c_{t+1}) = u'(c_t) \quad (30)$$

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta) k_t - c_t \quad (31)$$

と表現し直される。このとき、(30), (31) 式の体系を満たす定常解  $(k^*, c^*)$  は、一意で鞍点 (saddle point) を構成することが確かめられる。因みに、時間選好率 (rate of time preference)  $\rho = 1/\beta - 1$  に対し、 $f'(k^*) = \rho + \delta$  を満たす定常解  $k^*$  は修正された黄金律 (modified Golden Rule) と呼ばれる。(図-5参照。<sup>7)</sup>)

さて、ここで、親世代と子世代が重複する Diamond [8] の原モデルの Abel [1], Weil [24] による再定式化モデルの枠組の中で、資本遺贈がもたらす効果と、そこでの定常解の安定性を確かめよう。<sup>8)</sup>

ところで、親から子への利他的遺贈が考慮される経済においては、利己的個人のライフ・サイクル動機に基づく貯蓄は、かかる遺贈動機に基づく貯蓄にとって代わられることになる。

いま、各個人は、少年期と成人期の2期間生存し、少年期には経済決定に関与し得ず、消費決定も成人期の額のそれに包括されてしまうものとする。成人世代は、 $1+n$  人の子供をもち、均等に遺贈は配分され、さらに1単位の労働賦存をもち、非弾力的に生産過程に供給するものとする。かかる労働と前世代から遺贈された資本に対し、規模に関して収穫一定の生産函数に基づき、1種類の生産物を生産するものとする。このとき、遺贈資本は一世代限りで減耗し、孫世代以下には遺贈し得ないものとする。したがって、生産も消費も成人期に実行されるものとなる。

ここで、成人世代は、自らの消費  $c_t$  と子のそれ  $c_{t+1}$  に効用を覚える利他的選好  $v(c_t, c_{t+1})$  をもつものとする。このとき、成人世代の消費  $c_t$  は

$$c_t = f(k_t) + (1 - \delta) k_t - (1 + n) k_{t+1} \quad (32)$$

で表わされ、子のそれは

$$c_{t+1} = f(k_{t+1}) + (1 - \delta) k_{t+1} - (1 + n) k_{t+2} \quad (33)$$

で表わされる。しかるに、生産に際して、自らの賦存労働を用いるため賃金所得は、上の予約制約式((32), (33)式)には計上されてこない。

以上の想定の下で、世代  $t$  の成人の問題は、前世代からの遺贈  $k_t$ 、子の次世代への遺贈  $k_{t+2}$ 、人口成長率  $n$  を所与として、子への遺贈  $k_{t+1}$  を決定変数として

$$\begin{aligned} \max_{k_{t+1}} v(c_t, c_{t+1}) \\ \text{s.t. } c_t &= f(k_t) + (1 - \delta) k_t - (1 + n) k_{t+1} \\ c_{t+1} &= f(k_{t+1}) + (1 - \delta) k_{t+1} - (1 + n) k_{t+2} \end{aligned} \quad (34)$$

で表わされる。

直ちに、効用を最大化する子への遺贈  $k_{t+1}$  が満たすべき 1 階条件

$$-(1+n)v_1(c_t, c_{t+1}) - (1-\delta + f'(k_{t+1}))v_2(c_t, c_{t+1}) = 0 \quad (35)$$

$$\text{or } 1-\delta + f'(k_{t+1}) = (1+n)M(c_t, c_{t+1}) \quad (36)$$

がしたがう。ただし、 $v_1 \equiv \partial v / \partial c_t$ ,  $v_2 \equiv \partial v / \partial c_{t+1}$  である。 $M(c_t, c_{t+1}) \equiv v_2(c_t, c_{t+1}) / v_1(c_t, c_{t+1})$  であり、 $(c_t, c_{t+1})$  における限界代替率(の絶対値)を表わす。もし、生産物が正常財であれば、限界代替率  $M$  は逡減し、 $c_t$  に関する減少函数、 $c_{t+1}$  に関する増加函数となる。

ところで、人口成長率  $n=0$ , 時間選好率  $\rho$ , したがって、割引因子  $\beta$  が一定であれば、成人の効用函数は分離可能となり、

$$v(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \quad (37)$$

と表現し直され、したがって、上の体系((32), (35)式)は

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \quad (38)$$

$$u'(c_t) = \beta [1-\delta + f'(k_{t+1})] u'(c_{t+1}) \quad (39)$$

と書き改められる。

しかるに、利他的世代重複経済の均衡体系((38), (39)式)は、上の最適成長経済におけるそれ((30), (31)式)に一致する。ただし、かかる一致性は  $\beta \in (0, 1)$  の場合に妥当するに過ぎない。もし、 $\beta > 1$ , したがって  $\rho < 0$  であっても利他的世代重複経済は内点解を持ち続けるのに対し、最適成長経済においては効用函数、予算制約式が定義不能となり、 $\beta < 1$  でない限り意味をもたない。したがって、人口成長率  $n=0$ , 時間選好率  $\rho (> 0)$  一定となるとき、利他的世代重複経済の不動点内点解は、同一選好構造をもつ最適成長経済のそれと一致することが帰結される。

ここで、(38), (39)式の体系の定常解  $(k^*, c^*)$  を求めよう。

直ちに、

$$c^* = f(k^*) - \delta k^* \quad (40)$$

$$f'(k^*) = \rho + \delta \quad (41)$$

がしたがう。しかるに、減耗率  $\delta > 0$ , 時間選好率  $\rho = \frac{1}{\beta} - 1 > 0$  であるから、 $f'(0)$  と  $f'(\infty)$  が

$$0 \leq f'(\infty) < \rho + \delta < f'(0) \leq +\infty \quad (42)$$

を満たすとき、正の定常解  $(k^*, c^*)$  が存在する。(42)式は、1人当たりの資本  $k$  と限界生産力が  $k$  の変化に対し十分感応的であることを意味している。原点  $(0, 0)$  も定常解となるが、(41)式を満たし得ない。

さて、定常解  $(k^*, c^*)$  の動学をみてみよう。

まず、(38)式から

$$\begin{aligned} k_{t+1} \geq k_t &\iff f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \geq k_t \\ &\iff c_t \leq f(k_t) - \delta k_t \end{aligned} \quad (43)$$

がしたがう。次に、(39)式から

$$\begin{aligned}
 c_{t+1} \geq c_t &\iff \beta u'(c_{t+1}) \leq \beta u'(c_t) \\
 &\iff \frac{u'(c_t)}{1-\delta+f'(k_{t+1})} \leq \beta u'(c_t) \\
 &\iff 1 \leq \frac{1}{\beta[1-\delta+f'(k_{t+1})]} \tag{44}
 \end{aligned}$$

がしたがう。しかるに、(41)式を満たす定常解  $k^*$  に対し、(44)式の関係は、(40)、(41)式を考慮すれば

$$k_{t+1} \leq k^* \iff f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \leq k^* \tag{45}$$

を意味し、したがって

$$c_{t+1} \geq c_t \iff c_t \geq f(k_t) + (1-\delta)k_t - k^* \tag{46}$$

を導く。

以上から、

$$\Delta k_t = k_{t+1} - k_t \geq 0 \iff c_t \leq f(k_t) - \delta k_t \tag{47}$$

の関係は、 $f'(k) > 0$ 、 $f''(k) < 0$ の仮定の下で、 $\Delta k_t = 0$ 、すなわち、 $k =$ 一定の軌跡  $\mathbf{K}$  曲線を図-6に描く。

さらに、

$$\Delta c_t = c_{t+1} - c_t \geq 0 \iff \frac{1}{\beta[1-\delta+f'(k_{t+1})]} \tag{48}$$

の関係は、 $\Delta c_t = 0$ 、すなわち、 $c =$ 一定の軌跡  $\mathbf{C}$  曲線を図-6に描く。

最後に、定常解  $(k^*, c^*)$  の安定性をみてみよう。

まず、(39)式から  $k_{t+1}$  を消去すべく

$$k_{t+1} \equiv x(k_t, c_t) \tag{49}$$

と設定する。ただし、 $x(k, c) = f(k) + (1-\delta)k - c$  と定義される。(38)、(39)式の動学体系の偏微係数から成る Jacobian 行列  $J$

$$J = \begin{bmatrix} x_k & x_c \\ \frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_t} & \frac{\partial c_{t+1}}{\partial c_t} \end{bmatrix} \tag{50}$$

を定常解  $(k^*, c^*)$  で評価し、(39)式を想起すれば、 $x_k = 1/\beta = 1-\delta+f'[x(k^*, c^*)]$  がしたがう、

$$\frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{\beta u'(c^*) f''[x(k^*, c^*)] x_k}{\beta u''(c^*) [1-\delta+f'[x(k^*, c^*)]]} = \frac{f''(k^*)}{A(c^*)} \tag{51}$$

がしたがう。ただし、 $A(c) \equiv -u''(c)/u'(c)$  である。さらに、

$$\frac{\partial c_{t+1}}{\partial c_t} = \frac{\beta u'(c^*) f''[x(k^*, c^*)] x_t - u''(c^*)}{\beta u''(c^*) [1 - \delta + f'[x(k^*, c^*)]]} = 1 - \frac{\beta f''(k^*)}{A(c^*)} \quad (52)$$

がしたがう。したがって、Jacobian 行列は、

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ \frac{f''(k^*)}{A(c^*)} & 1 - \frac{\beta f''(k^*)}{A(c^*)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

と表現し直される。直ちに、

$$\text{tr}(J) = 1 + \frac{1}{\beta} - \frac{\beta f''(k^*)}{A(c^*)} \geq 1 + \frac{1}{\beta} > 2 \quad (54)$$

$$\det(J) = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{\beta f''(k^*)}{A(c^*)} \right) + \frac{f''(k^*)}{A(c^*)} = \frac{1}{\beta} > 1 \quad (55)$$

がしたがう。しかるに、判別式

$$\Delta = (\text{tr}(J))^2 - 4\det(J) \geq \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{4}{\beta} = \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 > 0 \quad (56)$$

がしたがう、さらに、特性方程式

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) \quad (57)$$

は、2つの正の実根  $\lambda_1, \lambda_2 (> 0)$  をもつ。 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  とすれば、 $\lambda_1 + \lambda_2 > 2$ 、 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 1$  を導く。しかるに

$$p(1) = 1 - \text{tr}(J) + \det(J) = \beta \frac{f''(k^*)}{A(c^*)} < 0 \quad (58)$$

がしたがうから、 $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$  と帰結される。このことは、定常解  $(k^*, c^*)$  が鞍点を構成することを意味している。 $k^* : f'(k^*) = \rho + \delta$  に収束する鞍点経路がしたがう。しかるに、黄金律  $\hat{k}$  と定常解  $k^*$  の間に  $k^* < \hat{k}$  なる関係がしたがうとき、体系は動的に効率的 (dynamically efficient) な状態にあり、逆に、 $\hat{k} < k^*$  のとき動的に非効率的 (dynamically inefficient) な状態にあると呼ばれる。前者の場合は図-6-(a)、後者の場合は図-6-(b)にそれぞれ示される。

## 2. 弾力的労働供給

本項では、次世代に資本を遺贈する利他的選好をもつ若年期、老年期から成る世代重複経済において、若年期に前世代からの遺贈資本の下で生産を組織し、老年期に消費と次世代への資本遺贈を行うところでの定常解の安定性をみる。<sup>9)</sup>

しかるに、前項においては、生産は成人が組織し、賦存労働を非弾力的に生産過程に供給したのに対し、本項においては、生産は若年者が組織し、しかも賦存労働を自由に弾力的に供給するものとする。<sup>10)</sup> 遺贈決定は、前項におけると同様に老年者(成人)が下だすものとする。さらに、人口は一定 ( $n=0$ ) で、各世代は将来の価格、数量について完全予見 (perfect foresight) をもつものとする。

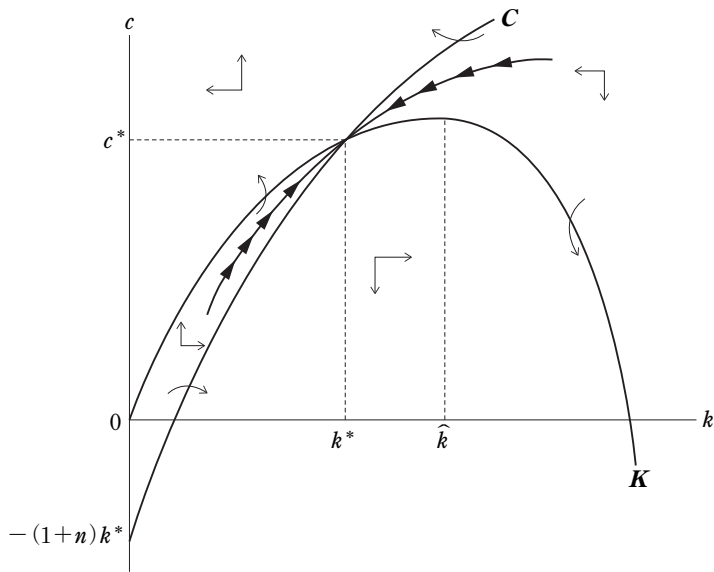


図-6-(a)

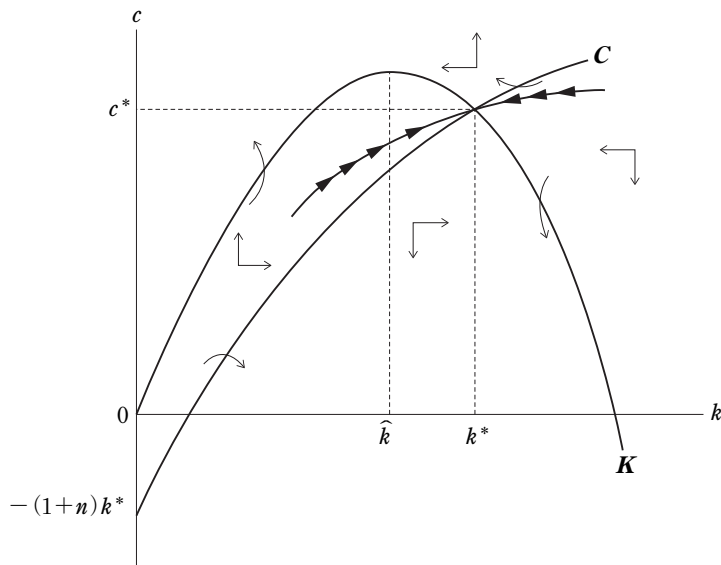


図-6-(b)

る。

いま、 $t$  世代の最大効用が若年期に生産過程に供給した労働分の不効用と老年期における消費からの効用、さらに加えて、次世代が享受し得る割引最大効用の和として定義されるものとする。このとき、 $t$  世代の最大効用は、評価関数  $V$  を用いて

$$V_t(I_{t-1}) = \max_{(l_t, I_t)} [\beta u(c_{2t}) - v(l_t)] + \theta V_{t+1}(I_t) \quad (59)$$



で表わされる。評価函数  $V_t(I_{t-1})$  は、前世代からの資本遺贈  $I_{t-1}$  に依存し、 $V_{t+1}(I_t)$  は、次世代が享受し得る遺贈  $I_t$  に依存することを表わしている。ただし、 $c_{2t}$  は  $t$  世代の老年期の消費、 $l_t$  は若年期の労働供給量であり、 $\beta$  は異時点間割引因子、 $\theta$  は異世代間割引因子であり、 $0 < \beta, \theta < 1$  と仮定される。さらに、効用函数  $u, v$  は区間  $[0, +\infty]$  において連続であり、すべての  $c, l$  に対し、 $u'(c) > 0$ ,  $u''(c) \leq 0, v'(l) > 0, v''(l) > 0$ , そして  $\lim_{l \rightarrow \infty} v'(l) = +\infty, \lim_{l \rightarrow 0} v'(l) = 0$  と仮定される。

さて、若年者が組織する生産過程を特定しよう。

いま、生産函数  $F$  は、前世代からの資本遺贈  $I_{t-1}$  と自世代の労働供給量  $l_t$  から、前項同様、消費にも資本用役としても使用できる 1 種類の生産物  $x_t$  を生産するものとする。すなわち、

$$x_t = F(l_t, I_{t-1}) = I_{t-1} F\left(\frac{l_t}{I_{t-1}}, 1\right) = I_{t-1} f(n_{t-1}) \quad (60)$$

がしたがう。ただし、 $n_{t-1} = l_t / I_{t-1}$  で労働・資本比率を表わし、<sup>(11)</sup>  $n_{t-1} (> 0)$  に対し、 $f' \geq 0, f'' \leq 0$  を満たすものとする。

しかるに、生産が利潤最大化を図る競争的企業によって行なわれるものとする、利潤最大化条件

$$(1+r_t) = f(n_{t-1}) - n_{t-1} f'(n_{t-1}) \quad (61)$$

$$w_t = f'(n_{t-1}) \quad (62)$$

がしたがう。このとき、生産函数の 1 次同次性の仮定は利潤ゼロを導く。ただし、 $w_t$  は賃金率である。

以上から、 $t$  世代の生涯予算制約式

$$c_{2t} = (1+r_{t+1}) w_t l_t - I_t \quad (63)$$

がしたがう。 $1+r_{t+1}$  は、 $t+1$  期に適用される割引因子である。

いま、生涯予算制約 ((63) 式) の下で、上の評価函数 ((59) 式) の最大化を実行すれば、労働供給量  $l_t$ 、遺贈量  $I_t$  について、それぞれの 1 階条件

$$\beta u'(c_{2t}) (1+r_{t+1}) - v'(l_t) w_t = 0 \quad (64)$$

$$-\beta u'(c_{2t}) + \theta V'_{t+1}(I_t) = 0 \quad (65)$$

がしたがう。ここで、評価函数  $V$  の遺贈水準に関する包絡面条件 (envelope condition) を導いておこう。 $t$  世代について  $I_{t-1}$  に関する評価函数  $V$  の包絡面条件

$$\begin{aligned} V'_t(I_{t-1}) &= v'(l_t) w_t \frac{\partial l_t}{\partial I_{t-1}} + \beta u'(c_{2t}) \left[ -(1+r_{t+1}) \frac{\partial l_t}{\partial I_{t-1}} + (1+r_{t+1}) - \frac{\partial I_t}{\partial I_{t-1}} \right] \\ &\quad + \theta V'_{t+1}(I_t) \frac{\partial I_t}{\partial I_{t-1}} \\ &= \frac{\partial l_t}{\partial I_{t-1}} \left[ v'(l_t) w_t - \beta u'(c_{2t}) (1+r_{t+1}) \right] + \frac{\partial I_t}{\partial I_{t-1}} \left[ -\beta u'(c_{2t}) + \theta V'_{t+1}(I_t) \right] \\ &\quad + \beta u'(c_{2t}) (1+r_{t+1}) \end{aligned} \quad (66)$$

がしたがう。しかるに、(66)式の右辺の [ ] 内は、上の(64), (65)式からゼロとなり、したがって、(66)式は

$$V'_t(I_{t-1}) = \beta u'(c_{2t}) (1+r_{t+1}) = v'(l_t) w_t \quad (67)$$

と表現し直される。いま、(67)式を(65)式に適用すれば

$$-\beta u'(c_{2t}) (1+r_{t+1}) + \theta v'(l_{t+1}) w_{t+1} = 0 \quad (70)$$

がしたがう。

ここで、 $\beta(1+r)u'(c) \equiv \widehat{U}(c)$ ,  $\theta wv'(l) \equiv \widehat{V}(l(w))$  と設定すれば、上の(70)式は

$$\widehat{U}(c_{2t}) = \widehat{V}(l_t(w_t)) \quad (71)$$

で表わされる。しかるに、上の効用函数  $u, v$  に関する仮定の下で、 $\widehat{U}'(c) < 0$ ,  $\lim_{c \rightarrow \infty} \widehat{U}(c) = +\infty$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0} \widehat{U}(c) = 0$  がしたがう。いま、逆函数を用いれば

$$c_{2t} = \widehat{U}^{-1}(\widehat{V}(l_t(w_t))) \equiv g[n_{t-1}(w_t) I_{t-1}] \quad (72)$$

がしたがう。このとき、 $g' > 0$  がしたがう。

ところで、遺贈を次世代への投資とみなし、消費を行なわない若年期の総賃金所得を貯蓄とみなせば、資本市場の均衡は、投資 = 貯蓄、すなわち、

$$I_t = w_t l_t \quad (73)$$

の成立を要請する。したがって、老年者の予算は、

$$(1+r_{t+1}) w_t l_t - I_t = r_{t+1} I_t = [f(n_t) - n_t f'(n_t)] I_t - 1 \quad (74)$$

と表現し直される。しかるに、生涯予算制約式((63)式)を想起すれば、(74)式は、

$$[f(n_t) - n_t f'(n_t)] I_{t-1} = g[n_{t-1}(w_t) I_{t-1}] \quad (75)$$

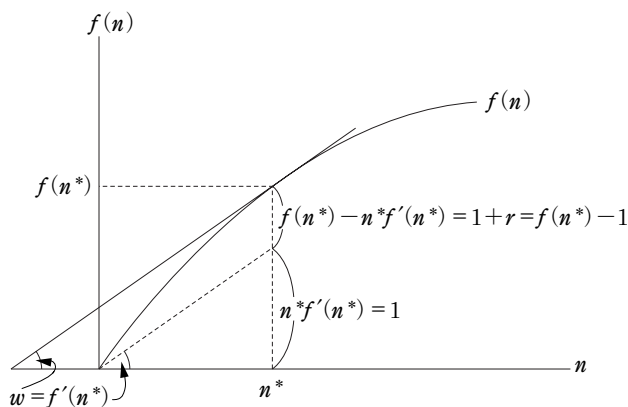


図-7

と変形され、さらに

$$I_t = f'(n_{t-1})l_t = f'(n_{t-1})n_{t-1}I_{t-1} \quad (76)$$

がしたがう。

さて、将来の価格、数量に関する完全予見の仮定の下で、(75)、(76)式の体系の定常解は、定常賃金  $w^*$  に対し、次の体系を与える。

$$I^*(f(n^*) - 1) - 1 = g(n^*I^*) \quad (77)$$

$$f'(n^*)n^* = 1 \quad (78)$$

さて、上の体系((75)、(76)式)から、Jacobian 行列を導き定常解  $(n^*, I^*)$  で評価すれば

$$J = \begin{bmatrix} [g'(n^*I^*) - n^*f''(n^*)]I^* & f(n^*) - 1 - g'(n^*I^*)n^* \\ -[n^*f''(n^*) + f'(n^*)]I^* & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

がしたがう。

ここで、上の体系の労働と資本の間の代替弾力性 (substitution elasticity between labor and capital)  $\sigma$  をパラメータとして採用しよう。

労働と資本の間の代替弾力性  $\sigma$  は

$$\sigma = -\frac{(1-w_l)f'(n)}{nf''(n)}, \quad \text{where } w_l = \frac{nf'(n)}{f(n)} \quad (80)$$

で定義される。(図-7参照。)しかるに、 $w_l$  は労働分配率であり、定常解において、 $w_l(n^*) = 1/f(n^*)$  と簡単化される。以下、表記上の簡単化のために各函数の要素の表示を省略しよう。

上の体系の定常解が Hopf 分岐を発生させる可能性をみてみよう。

いま、代替弾力性を用いて、Jacobian 行列を書き改めれば

$$J = \begin{bmatrix} \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} + g' \right] I & f - 1 - g' \cdot n \\ \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} - f' \right] I & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

がしたがう。

さて、上の Jacobian 行列の特性根は、次の特性方程式  $p(\lambda)$  の根となる。

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |J - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} + g' \right] I - \lambda & f - 1 - g' \cdot n \\ \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} - f' \right] & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} + g' \right] \lambda \cdot I - \left[ \frac{(1-w_l)f'}{\sigma} - f' \right] (f - 1 - g' \cdot n) = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

がしたがう。(82)式は、さらに

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det J = 0 \quad (83)$$

と表現し直される。

さて、以下で、代替弾力性をパラメータとする上の遺贈体系の定常解が Hopf 分岐を発生させる可能性をみるために、前節でみた条件、すなわち、 $\text{tr}(J) = 0$  かつ  $\det(J) > 0$  が同時に満たされなければならないことを要請する条件を適用しよう。

まず、 $\text{tr}(J) = 0$  は、

$$-\frac{(1-w_l)f'}{\sigma} = g' \quad (84)$$

を意味する。(84)式を考慮すれば、 $\det(J) > 0$  は、

$$\begin{aligned} \det(J) &= \left( \frac{1-w_l}{\sigma} - 1 \right) f' \left[ f - 1 + \frac{(1-w_l)f' \cdot n}{\sigma} \right] I \\ &= \left( \frac{1-w_l}{\sigma} - 1 \right) f' \left( f - 1 + \frac{1-w_l}{\sigma} \right) I > 0 \end{aligned} \quad (85)$$

で表わされる。しかるに、定常解において

$$f - 1 = f - nf'(n) = R_l (> 0) \quad (86)$$

がしたがう。ただし、 $R_l$  は資本所得の分配シェアを表わす。このとき、 $f - 1 + \frac{1-w_l}{\sigma} = R_l + \frac{1-w_l}{\sigma} > 0$  がしたがうから、 $\det(J) > 0$  が成立するためには、

$$\frac{1-w_l}{\sigma} - 1 > 0 \quad (87)$$

が満たされることが要請される。しかるに、 $1 - w_l = w_l = R_l/f$  を考慮すれば、(87)式は、

$$\sigma < \frac{R_l}{f} \quad (88)$$

を導く。ただし、 $w_l$  は資本分配率である。

上の (88)式は、労働と資本との間の代替弾力性をパラメータとする遺贈体系は、代替弾力性が資本分配率を下回るとき定常解が Hopf 分岐を発生させることを示唆している。

- 5) 2 期間生存する世代の重複に際して、本稿における期間 (period) の特定化は、相対的である。すなわち、本項では、「少年期」、「成人期」の区分にしたがい、「成人期」に当たる世代が生産を組織するのに対し、次項では、「若年期」、「老年期」の区分にしたがい「若年期」に当たる世代が生産を組織すると想定される。
- 6) 最適成長論の系譜として、確定的経済成長に関して、Cass [7], Koopmans [14], 貨幣的経済成長に関して、Sidrauski [22], Brock [5], さらに、不確実性下の経済成長に関して、Brock = Mirman [6] が先駆を成した。
- 7) 本図の作図手続きは、後の図-6のそれに準ずる。ただし、 $\hat{k}$  は、最大消費をもたらす黄金律 (Golden Rule) である。
- 8) 以下の議論の手続きは、Azariadis, *op. cit.*, に負う。
- 9) 本項の定常解の安定性に関する手続きの多くを Reichlin [19] に負う。

- 10) かかる想定は, Reichlin, *op. cit.*, に負う。
- 11) 伝統的な資本・労働比率 (capital labor ratio) に代わって労働・資本比率 (labor capital ratio) が適用されることに注意されたい。

### 結びにかえて

資本主義経済の中にその制度的対応を見出すことができないとする理由から, 滋愛に満ちた中央計画局が経済運営を担う最適成長論は, 鬼子扱いされるに甘んじざるを得ない位置に置かれた時期があった。

しかるに, 子世代に対し利他的選好をもつ親世代が子世代と重複して生存する経済において, 中央計画局が導いた筈のプログラムを親世代が実現し得ることなど, 最適成長論に異を唱えた者には, 後知恵で物を言うは易しではあるが, 想像を絶することであるに違いない。

最適成長経済を再現し得る世代重複生産経済は, 親世代が賦存労働を非弾力的に供給し, 生産を組織し, 消費水準と次世代への資本遺贈分を決定すべく行動するそれである。そこに実現される経済には鞍点経路がともなうことが帰結される。

上と相違して, 生産を若年世代が賦存労働を内生的, 弾力的に供給しながら組織し, 老年世代が消費水準, 次世代への資本遺贈分を決定する世代重複生産経済では, 生産過程における労働・資本間の代替弾力性をパラメータとするとき, Hopf 分岐が発生する可能性が生まれる。Hopf 分岐の発生は, 上の代替弾力性が, 全所得のうち資本所得が占める資本分配率を下回ることを条件とすることが帰結された。

かかる分岐の発生余地のある経済に対して, 政府が採る安定化政策のあり方は, 本稿の興味深い発展化の一つの方向であろう。

### References

- [ 1 ] A. B. Abell, "Operative Gift and Bequest Motives," *American Economic Review*, 77, 5, 1987.
- [ 2 ] C. Azariadis, *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, 1993.
- [ 3 ] D. Bernheim and D. Ray, "Economic Growth with Intergenerational Altruism," *Review of Economic Studies*, 54, 1987.
- [ 4 ] J. B. Burbidge, "Government Debt in an Overlapping-Generation Model with Bequests and Gifts," *American Economic Review*, 73, 1, 1983.
- [ 5 ] W. Brock, "Money and Growth: the Case of Long-Run Perfect Foresight," *International Economic Review*, 15, 1974.
- [ 6 ] \_\_\_\_\_, and L. Mirman, "Optimal Economic Growth and Uncertainty: the Discounted Case," *Journal of Economic Theory*, 4, 1972.
- [ 7 ] D. Cass, "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32, 1965.
- [ 8 ] P. Diamond, "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, 55, 1965.

- [ 9 ] A. Drazen, "Government Debt, Human Capital, and Bequests in a Life-Cycle Model," *Journal of Political Economy*, 86, 3, 1978.
- [10] R. E. A. Farmer, "Deficits and Cycles," *Journal of Economic Theory*, 40, 1986.
- [11] D. Gale, "Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models," *Journal of Economic Theory*, 6, 1973.
- [12] J.-M. Grandmont, "On Endogenous Competitive Business Cycles," *Econometrica*, 53, 1985.
- [13] E. Kohlberg, "A Model of Economic Growth with Altruism between Generations," *Journal of Economic Theory*, 13, 1976.
- [14] T. Koopmans, "On the Concept of Optimal Growth," in *The Economic Approach to Development Planning*, Rand McNally, 1965.
- [15] J. Lane and T. Mitra, "On Nash Equilibrium Programs of Capital Accumulation under Altruistic Preferences," *International Economic Review*, 22, 2, 1981.
- [16] W. Leininger, "The Existence of Perfect Equilibria in a Model of Growth with Altruism between Generations," *Review of Economic Studies*, 53, 1986.
- [17] A. Medio, *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, 1992.
- [18] S. A. O'Connell and S. P. Zeldes, "Dynamic Efficiency in Gifts Economy," *Journal of Monetary Economics*, 31, 1993.
- [19] P. Reichlin, "Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production," *Journal of Economic Theory*, 40, 1986.
- [20] J. T. Sandefur, *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*, Clarendon Press, 1990.
- [21] R. Shone, *Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Applications*, Cambridge University Press, 2002.
- [22] A. Sidrauski, "Inflation and Economic Growth," *Journal of Political Economy*, 75, 1967.
- [23] T. Vialar, *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*, Springer, 2009.
- [24] P. Weil, "'Love thy Children': Reflection on the Barro Debt Neutrality Theorem," *Journal of Monetary Economics*, 19, 1987.